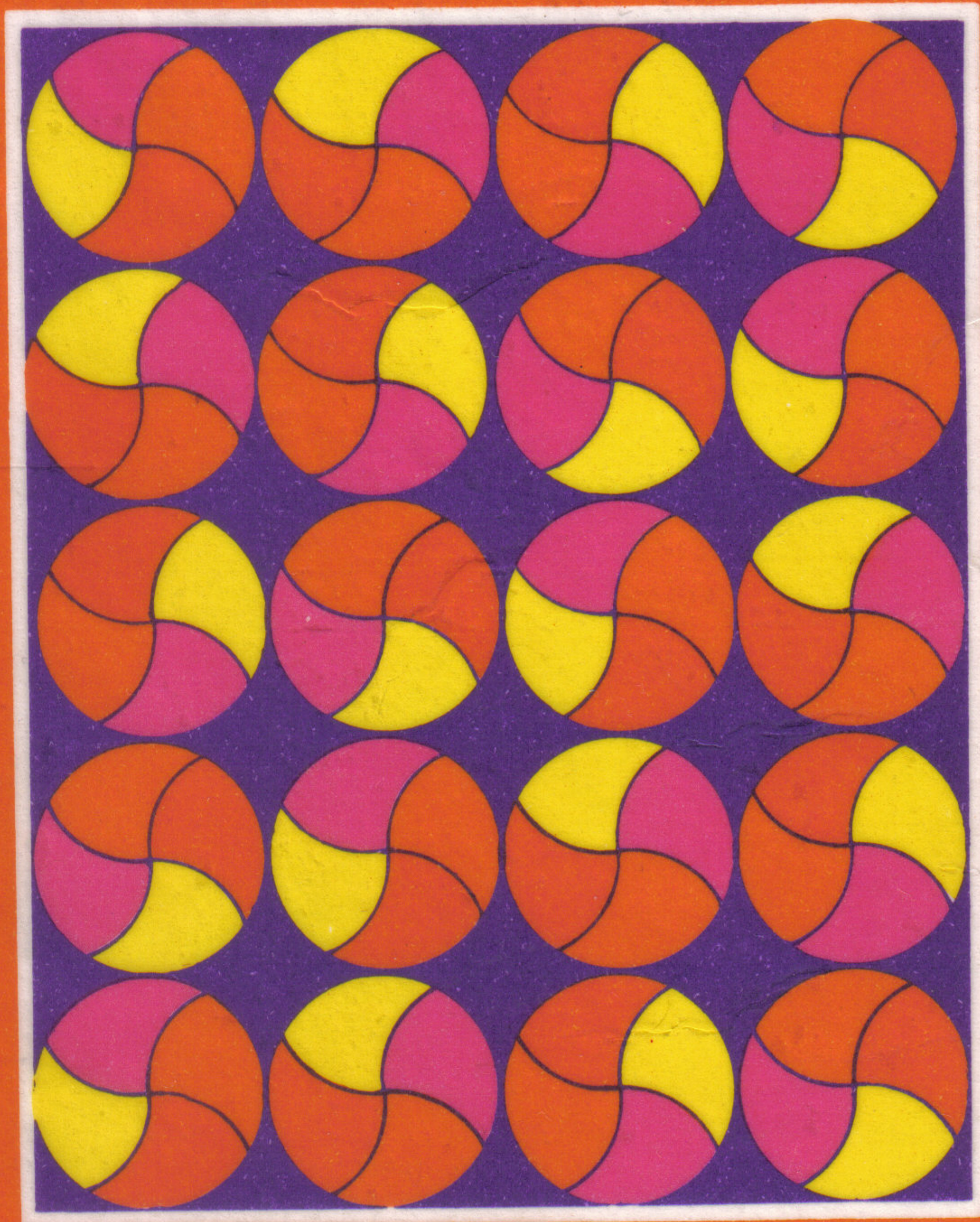
Álgebra I

2º grau, exame supletivo e vestibulares

A. C. Morgado
E. Wagner
M. Jorge

livraria francisco alves editora s.a.

Álgebra I

A. C. MORGADO / E. WAGNER / M. JORGE

Álgebra I

CONCEITOS BÁSICOS E TRINÔMIO DO 2º GRAU

LIVRARIA FRANCISCO ALVES EDITORA S.A.
RIO DE JANEIRO — SÃO PAULO — BELO HORIZONTE
RECIFE — CURITIBA

Sumário

CAPÍTULO 1

OS INTEIROS

1. O CONJUNTO DOS INTEIROS

O leitor conhece desde o ensino fundamental os números inteiros ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... e sabe que:

I) A cada par (a, b) de inteiros correspondem dois inteiros denominados soma e produto de a e b, que são representados por $a + b$ e $a.b$ (ou axb), respectivamente.

Dizemos que o conjunto dos inteiros é fechado em relação à soma e ao produto, isto é, a soma e o produto de inteiros são inteiros.

II) Para quaisquer inteiros a e b,
$a + b = b + a$ e $a.b = b.a$
Dizemos que a soma e o produto são operações comutativas.

III) Para quaisquer inteiros a, b e c,
$a + (b + c) = (a + b) + c$ e $a. (b.c) = (a.b) . c$.
Dizemos que a soma e o produto são operações associativas.

IV) Para quaisquer inteiros a, b e c,
$a. (b + c) = (a . b) + (a . c)$

dizemos que o produto é distributivo em relação à soma.

V) Os inteiros 0 e 1 são diferentes e, para qualquer inteiro a,
$a + 0 = a$ e $a . 1 = a$
dizemos que 0 e 1 são os elementos neutros das operações de soma e produto, respectivamente.

VI) Para cada inteiro a, a equação $x + a = 0$ possui uma única solução inteira, que é representada por $-a$ e denominada simétrico do número a.

VII) Se $c \neq 0$ e $ca = cb$, então $a = b$.
Esta propriedade é denominada lei do corte.
Destas sete propriedades decorrem muitas outras, tais como:

VIII) Para quàlquer inteiro a, $a. 0 = 0$.
Com efeito, como $a + 0 = a$ (por V),
$a. (a + 0) = a.a.$, daí, (por IV),
$a. a + a. 0 = a.a.$, daí, (por VI),
$-(a.a) + (a.a + a.0) = -(a.a) + (a.a)$.
Por II, obtemos $[-(a.a) + a.a] + a.0 = -(a.a) +$
$+ (a.a)$.
Por VI, obtemos $0 + a.0 = 0$
Mas, por V, $a.0 = 0$.

IX) Para quaisquer inteiros a e b,
$(-a).b = -(a.b)$.
Com efeito, $(-a).b + (a.b) = b.(-a) + b.a = b.$
$[(-a) + a] = b.0 = 0$.
Outrossim, $-(a.b) + (a.b) = 0$,
Logo, $(-a).b$ e $-(a.b)$ são soluções da equação $x + (a.b) = 0$. Como, por VI, esta equação possui uma única solução, resulta $(-a).b = -(a.b)$.

X) Para quaisquer inteiros a e b,
$(-a). (-b) = a.b$.

Com efeito, $(-a).(-b) + (-a).(b) = (-a)[(-b + b] = (-a). 0 = 0$. Outrossim, $(a.b) + (-a).(b) = (a.b) + [-(a.b)] = -(a.b) + (a.b) = 0$.

Logo, $(-a).(-b)$ e $(a.b)$ são soluções da equação $x + (-a).(b) = 0$. Como esta equação possui solução única, resulta $(-a).(-b) = (a.b)$.

XI) Se $a.b = 0$, então $a = 0$ ou $b = 0$.
Com efeito, se $a.b = 0$, então, $a.b = a.0$. Se $a \neq 0$, então, pela lei do corte, $b = 0$.
Definimos a operação de subtração no conjunto dos inteiros pondo $a - b = a + (-b)$.
Assim, por exemplo, $(2) - (-3) = 2 + (3) = 5$.

2. A ORDEM DOS INTEIROS

Há uma classe de inteiros, chamada classe dos inteiros positivos (ou classe dos números naturais), que goza das seguintes propriedades:

I) A soma de dois inteiros positivos é um inteiro positivo.

II) O produto de dois inteiros positivos é um inteiro positivo.

III) Para cada inteiro a, uma e somente uma das seguintes alternativas é verdadeira:
Ou $a = 0$, ou a é positivo, ou $-a$ é positivo (lei da tricotomia). Não é difícil constatar que a classe dos inteiros positivos é formada pelos inteiros 1, 2, 3, 4, 5,...

Definimos as relações $>$, $<$, $\geqslant$, $\leqslant$ por:
$a > b$ (a é maior que b) se e só se $a - b$ é positivo.
$a < b$ (a é menor que b) se e só se $b > a$.
$a \geqslant b$ (a é maior ou igual a b) se e só se $a >$ ou $a = b$
$a \leqslant b$ (a é menor ou igual a b) se e só se $a < b$ ou $a = b$.

É claro que a é positivo se e só se $a > 0$.

Dizemos que a é negativo se e só se $-a$ é positivo

3. O PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO

Toda coleção não vazia, de inteiros positivos, admite um elemento mínimo, isto é, se A é uma coleção não vazia, de inteiros positivos, existe um inteiro positivo x tal que:

1) x pertence a A.
2) Para todo y pertencente a A, $x \leqslant y$.

4. MÓDULOS

Definimos o módulo ou valor absoluto do inteiro a, representado por $|a|$, pondo

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ se } a \geqslant 0 \\ -a, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

Assim, $|3| = 3$, $|0| = 0$, $|-51| = 51$.

5. DIVISIBILIDADE

Um inteiro a é divisível por um inteiro b se e só se existe um inteiro c, tal que $a = bc$. Neste caso, dizemos que a é múltiplo de b, ou que b divide a, e escrevemos $b \mid a$.

Assim, $2 \mid 16$ (2 divide 16), pois existe um inteiro c ($c = 8$), tal que $16 = 2.c$.

Assim, $-3 \mid 15$ (-3 divide 15), pois existe um inteiro c ($c = -5$), tal que $15 = (-3).c$.

Assim, $8 \nmid 60$ (8 não divide 60), pois não existe um inteiro c, tal que $60 = 8.c$.

Chamamos de pares os inteiros que são divisíveis por 2 e de ímpares os que não são divisíveis por 2.

6. NÚMEROS PRIMOS

Dizemos que um inteiro p é primo se e só se $p > 1$ e c únicos divisores de p são ± 1 e $\pm p$.

É fácil constatar que os dez primeiros números primos são 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29.

7. A DIVISÃO DE INTEIROS

Teorema: Se a e b são inteiros e $b > 0$, existem inteiros q e r, univocamente determinados,
$0 \leqslant r < b$, tais que $a = bq + r$.

(Dizemos, então, que na divisão de a por b o quociente é q e o resto é r, a é dito dividendo e b, divisor.)

Demonstração: Consideremos o conjunto dos números da forma $a - bx$, x inteiro. Como $b \geqslant 1$,
$(-|a|).b \leqslant -|a| \leqslant a$. Daí, $a - (-|a|).b \geqslant 0$. Logo, o referido conjunto possui um elemento positivo ou nulo. Pelo princípio da boa ordenação, ele possui um menor elemento não negativo, digamos $a - bq = r$. Daí, $a = bq + r$ e, por construção, $r \geqslant 0$. Resta-nos provar que $r < b$.

Ora, se $r \geqslant b$, então $a - b(q + 1) = r - b \geqslant 0$ seria menor que $-bq$, contrariando o fato que $a - bq$ é o menor elemento positivo ou nulo do referido conjunto. Logo, $r < b$.

Quanto à unicidade, se $a = bq + r = bq_1 + r_1$, com $0 \leqslant r < b$ e $0 \leqslant r_1 < b_1$ teríamos $b(q - q_1) = r_1 - r$. Então, $(r_1 - r) \mid b$. Como $-b < r_1 - < b$, então $r_1 - r = 0$, isto é, $r = r_1$. Mas, daí, $b(q - q_1) = 0$. Como $b \neq 0$, $q - q_1 = 0$, isto é, $q = q_1$.

Exemplos:

7.1) Na divisão de 247 por 7, o quociente é 35 e o resto é 2, pois $247 = 7.35 + 2$ e $0 \leqslant 2 < 7$.

(Fazemos sinceros votos que o leitor conheça o processo que nos permitiu obter o quociente 35 e o resto 2.)

7.2) Se na divisão de a por b ($b > 0$), o quociente é q e o resto é 0, então, na divisão de $-a$ por b, o quociente é $-q$ e o resto é 0.

Com efeito, se $a = bq + 0$, então, $-a = b(-q) + 0$.

Assim, como 115 dividido por 5 dá quociente 23 e resto 0, -115 dividido por 5 dá quociente -23 e resto 0.

7.3) Se na divisão de a por b ($b > 0$), o quociente é q e o resto é $r \neq 0$, então, na divisão de $-a$ por b, o quociente é $-(q+1)$ e o resto é $b - r$.

Com efeito, se $a = bq + r$, $0 < r < b$, então, $-a = -bq - r = -bq - b + b - r = b[-(q+1)] + (b - r)$, $0 < b - r < b$.

Assim, como 247 dividido por 7 dá quociente 35 e resto 2, -247 dividido por 7 dá quociente -36 e resto 5.

8. O MÁXIMO DIVISOR COMUM

Um inteiro positivo d é o máximo divisor comum dos inteiros a e b (usaremos a notação d = MDC [a, b]) se e só se possui as seguintes propriedades:

I) $d \mid a$ e $d \mid b$ (isto é, d é um divisor comum de a e b).

II) Se $c \mid a$ e $c \mid b$, então, $c \mid d$ (isto é, todo divisor comum de a e b também divide d).

Assim, por exemplo, MDC [12, 16] = 4, pois:

I) $4 \mid 12$ e $4 \mid 16$.

II) Os divisores comuns de 12 e 16 são 1, -1, 2, -2, 4, -4, e todos eles dividem 4.

TEOREMA: Se a e b são inteiros não nulos simultaneamente, então, MDC [a, b] existe e é único.

Demonstração: Consideremos o conjunto A de todos os números da forma $xa + yb$, x e y inteiros; a e b pertencem a A (pois $a = 1.\ a + 0.b$ e $b = 0.\ a + 1.b$) e como a e b não são nulos simultaneamente, a possui um elemento não nulo. Mas se $m = xa + yb$, então, $-m = (-x)\ a + (-y)\ b$, isto é, se $m \in A$, então, $-m \in A$. Logo, A possui pelo menos um elemento positivo. Então, pelo princípio da boa ordenação, A possui um elemento positivo mínimo, que representaremos por d.

Como $d \in A$, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = x_0 a + y_0 b$.

Repare que:

I) se $c|a$ e $c|b$, então, $c|(x_0 a + y_0 b)$, isto é, $c|d$

II) Se $p \in A$, existem inteiros, x_1 e y_1 tais que $p = x_1 a + y_1 b$. Dividindo p por d, obtemos $p = dq + r$, $0 \leqslant r < d$. Daí,
$x_1 a + y\ b = d\ (x_0 a + y_0 b) + r$. Logo, $r = (x_1 - dx_0)\ a + (y_1 - dy_0)\ b$ e r A.

Como $0 \leqslant r < d$ e d é o menor elemento positivo de A, x não pode ser positivo. Logo, $r = 0$ e $d|p$, isto é, d divide qualquer elemento de A. Em particular, $d|a$ e $d|b$.
I e II e o fato de d ser positivo mostram que $d = \text{MDC}\ [a, b]$.

Para provar que o máximo divisor comum de a e b é único, observemos que se d' fosse máximo divisor comum de a e b, teríamos $d|d'$ e $d'|d$. Daí, $d' = \pm d$. Como d e d' são positivos, teremos $d' = d$.

Corolário: Se $d = \text{MDC}\ [a, b]$, a e b não simultaneamente nulos, existem inteiros x e y tais que $d = xa + yb$.

Assim, por exemplo, como $\text{MDC}\ [12, 16] = 4$, podemos escrever 4 na forma $4 = (-1)\ 12 + (1)\ 16$.

9. O ALGORITMO DE EUCLIDES

O processo que usamos para achar o máximo divisor comum de dois inteiros, não nulos simultaneamente, é o algoritmo de Euclides, que passamos a descrever.

Processo: Dados a e b, dividimos a por b. Depois, dividimos b pelo resto desta divisão, x_1. Depois, dividimos r_1 pelo resto desta última divisão, r_2 e assim sucessivamente.

Quando chegarmos a um resto igual a zero, o MDC procurado será o último divisor, isto é,

$$
\begin{array}{ll}
a = bq_1 + r_1 & 0 \leqslant r_1 < b \\
b = r_1q_2 + r_2 & 0 \leqslant r_2 < r_1 \\
r_1 = r_2q_3 + r_3 & 0 \leqslant r_3 < r_2 \\
r_2 = r_3q_4 + r_4 & p \leqslant r_4 < r_3 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \\
r_{n-2} = r_{n-1} \cdot r_n + r_n & 0 \leqslant r_n < r_{n-1} \\
r_{n-1} = r_n \cdot q_{n+1} &
\end{array}
$$

Justificativa: Se $a = bq_1 + r_1$, todo divisor de a e b divide $a - bq_1 = r_1$ e todo divisor de b e r_1 divide $a = bq_1 + r_1$. Logo, os divisores comuns de a e b e os divisores comuns de b e r_1 são os mesmos.

Daí, MDC $[a, b]$ = MDC $[b, r_1]$. Repetindo o raciocínio, MDC $[b, r_1]$ = MDC $[r_1, r_2] = \dots =$ MDC $[r_{n-1}, r_n]$. Mas como $r_n | r_{n-1}$, MDC $[r_{n-1}, r_n] = r_n$. Logo, MDC $[a,b] = r_n$.

Observação: Na prática, damos aos cálculos a seguinte disposição:

	q_1	q_2	q_3	$\dots$	q_n	q_{n+1}
a	b	r_1	r_2	$\dots$	r_{n-1}	r_n = MDC $[a,b]$
r_1	r_2	r_3	r_4	$\dots$	0	

Exemplos:

9.1) Calculemos MDC [1960, 1050].

Ora,

	1	1	6	2
1960	1050	910	140	70
910	140	70	0	

Temos MDC [1960, 1050] = 70.

9.2) Calculemos MDC [– 180, 252].

Ora, MDC [– 180, 252] = MDC [252, 180]

	1	2	2
252	180	72	36
72	36	0	

Logo, MDC [– 180, 252] = 36.

9.3) Expressemos MDC [– 180, 252] na forma x (– 180) + y (252), o que é possível ser feito, de acordo com o corolário do teorema da existência e unicidade do MDC (seção 8).

O algoritmo de Euclides nos dá

$252 = 1 \cdot 180 + 72$
$180 = 2 \cdot 72 + 36$
$72 = 2 \cdot 36.$

Daí, $36 = 180 - 2 \cdot 72 = 180 - 2 \cdot (252 - 1 \cdot 180) =$
$= -2 \cdot 252 + 3 \cdot 180$

Logo, $36 = (-3)(-180) + (-2) \cdot (252)$.

Ou seja, $36 = x(-180) + y\,(252)$ com $x = -3$ e $y = -2$.

9.4) Definimos MDC [a, b, c] = MDC [MDC [a, b], c]. Assim, MDC [72, 48, 60] = MDC [MDC [72, 48], 60] = MDC [24, 60] = 12.

Exercícios resolvidos:

9.1) Achar as soluções inteiras da equação $2x + 5y = 10$.
Solução: Como MDC $[2, 5] = 1$, é fácil achar uma solução particular (x_0, y_0) da equação. O algoritmo de Euclides nos fornece

$$\begin{cases} 5 = 2.2 = 1. \\ 2 = 2.1. \end{cases}$$

Logo, $2.(-2) + 5.(1) = 1$.

Portanto, $x_0 = -2$ $y_0 = 1$ é uma solução particular.

Então, $2x + 5y = 1$ e como
$2(-2) + 5(1) = 1$,

a equação pode ser escrita
$2x + 5y = 2(-2) + 5(1)$, ou seja,
$2(x + 2) = 5(1 - y)$.

Logo, $5 \mid (x + 2)$. Portanto, deve existir um inteiro t tal que $x + 2 = 5t$. Substituindo na equação, resulta $1 - y = 2t$.

Resumindo, devemos ter
$x = 5t - 2$, $y = 1 - 2t$, t inteiro.

Resposta: $x = 5t - 2$, $y = 1 - 2t$ (t inteiro)

9.2) Achar as soluções inteiras da equação
$29x + 21y = 6$.

Solução: MDC $[29, 21] = 1$.

Logo, existem x_0 e y_0 tais que $29x_0 + 21y_0 = 1$

Com efeito, o algoritmo de Euclides fornece.

$$\begin{cases} 29 = 1.21 + 8 \\ 21 = 2.8 + 5 \\ 8 = 1.5 + 3 \\ 5 = 1.3 + 2 \\ 3 = 1.2 + 1 \\ 2 = 2.1 \end{cases}$$

Daí, $1 = 3 - 1.2 = 3 - 1(5. - 1.3) = 2.3 - 1.5 =$
$= 2.(8-1.5) - 1.5 = 2.8-3.5 = 2.8-3(21 - 2.8) =$
$= 8.8-3.21 = 8\,(29-1.21) - 3.21 = 8.29 - 11.21.$

Logo, a equação pode ser escrita
$29x + 21y = 6.(8.29-11.21)$, ou seja,
$29\,(x-48) + 21\,(y + 66) = 0.$

Logo, $21 \mid (x-48)$. Isto é, deve existir t tal que
$x-48 = 21t$.

Substituindo na equação, $y + 66 = -29t$.
Daí, $x = 21t + 48, \quad y = -29t - 66$.

Resposta: $x = 21t + 48, \quad y = -29t - 66$
(t inteiro).

10. NÚMEROS PRIMOS ENTRE SI

Dizemos que a e b são primos entre si, se e só se MDC [a, b] = 1.

Teorema: Se a e c são primos entre si e $c \mid ab$, então, $c \mid b$.

Demonstração: Se a e c são primos entre si, MDC [a, c] = 1. Logo, existem inteiros x e y tais que $1 = xa + yc$. Daí, $b = xab + ybc$. Como $c \mid ab$ e $c \mid ybc$, então, $c \mid (xab + ybc)$, isto é, $c \mid b$.

Corolário: Se p é um primo e $p \mid ab$, então, $p \mid a$ ou $p \mid b$.

Demonstração: Se p é primo e $p \nmid a$, então, MDC [p, a] = 1. Logo, pelo teorema anterior, $p \mid b$.

11. O MÍNIMO MÚLTIPLO COMUM

Teorema:

Sejam a e b dois números não nulos simultaneamente. O número $m = \dfrac{|ab|}{\text{MDC}\,[a, b]}$ * é o único inteiro que possui, simultaneamente, as propriedades.

---

* Por esta notação estamos representando o quociente da divisão de $|ab|$ por MDC [a, b].

I) $m \geqslant 0$

II) $a \mid m$ e $b \mid m$

III) Se $a \mid n$ e $b \mid n$, então, $m \mid n$.

Demonstração:

a) m é inteiro, pois MDC [a, b] | a e, conseqüentemente, MDC [a, b] | |ab|.

b) $m \geqslant 0$, pois MDC [a, b] > 0 e $|ab| \geqslant 0$.

c) $a \mid m$, pois $m = |a| . \left|\dfrac{b}{\text{MDC}[a, b]}\right|$. Analogamente, $b \mid m$.

d) Se $a \mid n$ e $b \mid n$, então, existem inteiros x e y tais que $n = xa$ e $n = yb$.

Mas, chamando d = MDC [a, b], existem inteiros s e t tais que $a = s\,d$ e $b = td$. Daí, $n = x\,s\,d = y\,t\,d$.

Logo, $s \mid yt$. Mas MDC [s, t] = 1. Logo, $s \mid y$, isto é, existe um inteiro z tal que $y = sz$.

Portanto, $n = sztd = z\,\dfrac{sd . td}{d} = z\,\dfrac{ab}{d}$.

Logo, $n \mid \dfrac{|ab|}{d}$, isto é, $n \mid m$.

e) Se m_1 também tivesse estas três propriedades, então, $m \mid m_1$ e $m_1 \mid m$. como $m \geqslant 0$ e $m_1 \geqslant 0$. Então, $m = m_1$.

O número m assim definido é chamado de mínimo múltiplo comum de a e b, representado por MMC [a, b].

Exemplos:

11.1) $\text{MMC}\ [12, 15] = \dfrac{|12 \times 5|}{\text{MDC}\ [12, 15]} = \dfrac{|180|}{3} = 60$

11.2) Definimos MMC [a, b, c] = MMC [MMC [a, b], c].

Assim, MMC [12, 15, 8] = MMC [MMC [12, 15], 8] =

$$= \text{MMC}\ [60, 8] = \frac{|60 \times 8|}{\text{MDC}\ [60, 8]} = \frac{|480|}{4} = 120.$$

12. O TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

Todo inteiro a maior que um ou é primo ou pode ser representado como um produto de fatores primos. Além disso, esta representação é única, exceto quanto à ordem dos fatores.

Demonstração: Para a = 2, o teorema é trivial. Suponhamos, então, o teorema válido para 2, 3, . . ., a−1. Se a é primo, o teorema é válido para a. Se a não é primo, a possui um divisor positivo b, $b \neq 1$ e $b \neq a$. Logo, a = b.c. Mas como b e c são menores que a, b e c ou são primos ou produtos de primos, logo, a pode ser representado como um produto de primos. Seja s, então, o conjunto dos inteiros *a* maiores que um para os quais o teorema é falso. Se s não é vazio, pelo princípio da boa ordenação, s possui um menor elemento c. Como para a = 2 o teorema é verdadeiro, este menor elemento não é igual a 2. Mas, então, o teorema é verdadeiro para a igual a 2,3, . . ., c − 1. Mas isto acarreta, como já provamos, que o teorema é verdadeiro para a = c, o que é contraditório. Logo, s é vazio e o teorema é verdadeiro para todo a maior que um.

Para provar que a decomposição é única, admitamos que haja duas decomposições de um inteiro a,

$a = p_1 p_2 \cdots p_m = q_1 \cdot q_2 \cdots q_n$.

Como $p_1 | (q_1 q_2 \cdots q_n)$, então, p_1 divide pelo menos algum fator q_j.

Como $p_1 | q_j$ e são ambos primos, $p_1 = q_j$. Repetindo o raciocínio provaríamos que todo fator p_i é igual a algum q_j e vice-versa, ou seja, que os fatores das duas decomposições são os mesmos.

Exercícios resolvidos:

12.1) Decomponha 720 em fatores primos.

Solução: O processo que usamos é o das divisões sucessivas por fatores primos.

720	2
360	2
180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Logo, $720 = 2 \times 3 \times 5$.

Resposta: $720 = 2 \times 3 \times 5$

12.2) Obtenha todas as soluções inteiras da equação $xy = 12$.

Solução: $12 = 2 \times 2 \times 3$.

Logo, os produtos de inteiros que são iguais a 12 são: 12×1, 6×2, 4×3, $(-12) \times (-1)$, $(-6) \times (-2)$, $(-4) \times (-3)$ e os mesmos produtos com a ordem dos fatores invertida.

Resposta: $(x_1, y_1) = (12,1)$ $(x_2,y_2) = (1,12)$ $(x_3,y_3) = (6,2)$ $(x_4,y_4) = (2,6)$ $(x_5,y_5) = (4,3)$ $(x_6,y_6) = (3,4)$ $(x_7,y_7) = (-12,-1)$ $(x_8,y_8) = (-1,-12)$ $(x_9,y_9) = (-6,-2)$ $(x_{10},y_{10}) = (-2,-6)$ $(x_{11},y_{11}) = (-4,-3)$ $(x_{12},y_{12}) = (-3,4)$

Exemplos:

12.3) É fácil obter MDC e MMC de números dados se conhecemos suas decomposições em fatores primos. É fácil perceber que os fatores do MDC são os fatores dos números tomados sempre com o menor dos expoentes e os do MMC com o maior dos expoentes.

Assim, se

$a = 2^5 \times 3^2 \times 5$ $\quad b = 2^4 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$

$c = 2^6 \times 3 \times 7$

Temos
MMC [a,b,c] = $2^6 \times 3^3 \times 5^2 \times 7$
MDC [a,b,c] = 2×3
(Note que o expoente de 7 em a é 0 e que o expoente de 5 em c também é 0.)

13. A FUNÇÃO Ø DE EULER

"Seja n um inteiro maior que 1; quantos inteiros compreendidos entre 1 e n, inclusive, são primos com n?"

O problema acima é muito freqüente em matemática. Ocorre em teoria dos números, em geometria, em números complexos, etc... A resposta deste problema é representada por Ø(n).

Exemplos:

13.1) Ø(10) é o número de elementos do conjunto {1,2,3,4,5,6,7,8,9,10} que são primos com 10. Ora, neste conjunto são primos com 10 os números 1,3,7,9. Portanto, Ø(10) = 4.

13.2) Ø(15) é o número de elementos do conjunto {1,2,3,4,5,6,7,8,10,11,12,13,14,15} que são primos com 15.

Ora, neste conjunto são primos com 15 os números 1,2,4,7,8,11,13,14. Logo, Ø(15) = 8.

Teorema: Se n admite a decomposição em fatores primos, $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_n^{\alpha_n}$, então,

$$\varnothing(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_n}\right).$$

Não demonstraremos este teorema, aqui. O leitor interessado poderá encontrar a demonstração em "NUMBER THEORY — George E. ANDREWS — W. B. AUNDERS COMPANY — 1971"

Exemplos:

13.3) Calcule $\varnothing$ (180).

Ora, $180 = 2^2.3^2.5$.

Logo, $\varnothing(180) = 180(1 - \frac{1}{2})(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) =$

$= 180 \times \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{5} = 48.$

13.4) Calcule $\varnothing$ (75).

Ora, $75 = 3 \times 5^2$.

Logo, $\varnothing(75) = 75(1 - \frac{1}{3})(1 - \frac{1}{5}) = 75 \times \frac{2}{3} \times$

$\times \frac{4}{5} = 40.$

14. BASES DE NUMERAÇÃO

O nosso sistema de numeração (isto é, o sistema hindu-arábico) tem base 10. O que significa isto?

Isto quer dizer que usamos apenas dez símbolos (algarismos) para representar os números (0,1,2,3,4,5,6,7,8,9). Os restantes números são representados por combinações destes símbolos. Assim,

escrevemos 75 para representar $7.10 + 5$
223 " " $2.10^2 + 2.10 + 3$

E, de modo geral, escrevemos

$(a_n.a_{n-1}...a_2.a_1.a_0)_{10}$ para representar

$a_0 + 10\,a_1 + 10\,a_2 + \ldots + 10^{n-1}a_{n-1} + 10^n a_n$.

Como seriam outros sistemas de numeração?

No sistema de base 6, por exemplo, há apenas seis algarismos, 0,1,2,3,4,5, e $(a_n.a_{n-1}...a_2.a_2a_0)_6$ representa

$a_0 + 6a_1 + 6^2a_1 + 6^{n-1}a_{n-1} + 6^n a_n$.

Assim, os dez primeiros números naturais se escrevem na base 6.

$(1)_6$, $(2)_6$, $(3)_6$, $(4)_6$, $(5)_6$, $(10)_6$, $(11)_6$, $(12)_6$, $(13)_6$, $(14)_6$.

De modo geral,

$(a_n.a_{n-1}\ldots a_2.a_1.a_0)_b = a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_{n-1}b^{n-1} + $
$+ a_nb^n$.

Onde os algarismos aí podem tomar apenas os valores $0,1,2,\ldots,b-1$.

Surge naturalmente o problema: como obter a representação de um número N numa base b?

Ora, se $N = (a_n.a_{n-1}\ldots a_2a_1a_0)_b =$
$= a_0 + a_1b + a_2b^2 + \ldots + a_{n-1}b^{n-1} + a_nb^n$;
$N = a_0 + b\,(a_1 + a_2\,b + a_3b^2 + \ldots + a_{n-1}b^{n-1})$.

Logo, a_0 é o resto da divisão de N por b.

Dividindo o quociente q_1 por b,
$q_1 = a_1 + b\,(a_2 + a_3b + a_4b^2 + \ldots + a_{n-1}b^{n-3} + a_nb^{n-2})$.
a_1 é o resto da divisão de q_1 por b.

Dividindo este quociente q_2 por b,
$q_2 = a_2 + b\,(a_3 + a_4b + \ldots + a_{n-1}b^{n-4} + a_nb^{n-3})$
a_2 é o resto da divisão de q_2 por b, e assim sucessivamente.

Exercícios resolvidos:

14.1) Determine a representação de 171 na base 2.

Solução:

```
171 |2
 1   85 |2
     1   42 |2
         0   21 |2
             1   10 |2
                 0   5 |2
                     1   2 |2
                         0   1 |2
                             1   0
```

Logo, $171 = (10.101.011)_2$

Resposta: $(10.101.011)_2$

14.2) Determine a representação de 90 na base 6.

Solução:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 6 \\ \hline 0 & \begin{array}{r|l} 15 & 6 \\ \hline 3 & \begin{array}{r|l} 2 & 6 \\ \hline 2 & 0 \end{array} \end{array} \end{array}$$

Logo, $90 = (230)_6$

Resposta: $(230)_6$.

14.3) Determine o número cuja representação na base 6 é $(230)_6$.

Solução: $(230)_6 = 0 + 3.6 + 2.6^2 = 90$

Resposta: 90

14.4) Determine o número cuja representação na base vinte é $(47)_{20}$

Solução: $(47)_{20} = 7 + 4.20 = 87$.

Resposta: 87.

15. CONGRUÊNCIAS

Sejam a e b inteiros, m inteiro positivo.
a é côngruo a b módulo m se e só se $m \mid (a - b)$. Usaremos a notação $a \equiv b$ (mód m).

Exemplos: 15.1) $14 \equiv 8$ (mód 3), pois $3 \mid (14-8)$.
15.2) $20 \equiv -19$ (mód 3), pois $3 \mid [20 - (-19)]$.
15.3) $10 \not\equiv 8$ (mód 3), pois $3 \nmid (10-8)$.

Teorema: $a \equiv b$ (mód m) se e só se os restos das divisões de a e b por m são iguais.

Demonstração: Se os restos são iguais, então, $a = m q_1 + r$, e $b = mq_2 = r$. Daí, $a - b = m (q_1 - q_2)$ e $m | (a - b)$, isto é, $a \equiv b$ (mód m).

Reciprocamente, se $a \equiv b$ (mód m), $m | (a - b)$, isto é, existe um inteiro c tal que $a - b = cm$. Daí, $a = b + cm$. Dividindo b por m, $b = qm + r$ $(0 \leqslant r < m)$. Daí, $a = qm + r + cm = (q + c)\ m + r$ $(0 \leqslant r < m)$ e r é simultaneamente o resto da divisão de a por m e de b por m.

Propriedades:

1) Para todo inteiro a, $a \equiv a$ (mód m), pois $m | (a - a)$.

2) Se $a \equiv b$ (mód m), então, $b \equiv a$ (mód m), pois se $m | (a - b)$, então, $m | (b - a)$.

3) Se $a \equiv b$ (mód m) e $b \equiv c$ (mód m), então, $a \equiv c$ (mód m), pois se $m | (a - b)$ e $m | (b - c)$, então, $m | [(a - b) + (b - c)]$, isto é, $m | (a - c)$.

4) Se $a \equiv b$ (mód m) e $c \equiv d$ (mód m), então, $a + c \equiv b + d$ (mód m) e $ac \equiv bd$ (mód m), pois:

a) se $m | (a - b)$ e $m | (c - d)$, então, $m\ [|(a - b) + (c - d)]$, isto é, $m | [(a + c) - (b + d)]$.

b) Se $a \equiv b$ (mód m), então, $m | (a - b)$. Daí, $m | c(a - b)$, isto é, $m | (ca - cb)$ e $ca \equiv cb$ (mód m). Mas se $c \equiv d$ (mód m), então, $m | (c - d)$. Daí, $m | b (c - d)$, isto é, $m | (bc - bd)$ e $bc \equiv bd$ (mód m). Mas se $ca \equiv cb$ (mód m) e $bc \equiv bd$ (mód. m), então, pela terceira propriedade, $ac \equiv bd$ (mód m).

EXERCÍCIOS RESOLVIDOS

15.1) Calcule x sabendo que $7x \equiv 4$ (mód 10).

Solução: Vamos descobrir uma solução particular da congruência, isto é, vamos descobrir x tal que $10 | (7x_0 - 4)$. Ora, $10 | (7x_0 - 4)$ se existe y_0 tal que $7x_0 - 4 = 10y_0$, ou seja, $7x_0 - 10y_0 = 4$.

O algoritmo de Euclides nos permite escrever

$$\begin{cases} 10 = 1.7 + 3 \\ 7 = 2.3 + 1 \\ 3 = 3.1 \end{cases}$$

Daí, $1 = 7 - 2.3 = 7 - 2(10 - 1.7) = 3.7 - 2.10$.

E, conseqüentemente,

$7.12 - 10.8 = 4$.

Logo, $x_o = 12$ é uma solução.

Então, queremos achar x sabendo que $7x \equiv 4$ (mód 10) e $7.12 \equiv 4$ (mod. 10).

Subtraindo, $7(x - 12) \equiv 0$ (mód 10), isto é, $10 \mid 7(x - 12)$. Como 10 é primo com 7, devemos ter $10 \mid (x - 12)$, isto é, $x \equiv 12$ (mód 10).

Resposta: $x \equiv 12$ (mód 10).

15.2) Calcule x sabendo que $4x + 3 \equiv 4$ (mód 5).

Solução: Vamos descobrir uma solução particular da congruência, isto é, vamos descobrir x_o tal que $4x_o + 3 \equiv 4$ (mód 5), ou seja, tal que $5 \mid (4x_o + 3 - 4)$. Ora, $5 \mid (4x_o - 1)$ se existe y_o tal que $4x_o - 1 = 5y_o$, ou seja, $4x_o - 5y_o = 1$.

O algoritmo de Euclides nos permite escrever

$$\begin{cases} 5 = 1.4 + 1. \\ 4 = 4.1. \end{cases}$$

Daí, $4(-1) - 5(-1) = 1$.

Logo, $x_o = -1$ é uma solução.

Então, queremos achar x sabendo que

$4x + 3 \equiv 4$ (mód 5) e

$4(-1) + 3 \equiv 4$ (mód 5).

Subtraindo, $4(x + 1) \equiv 0$ (mód 5), isto é, $5 \mid 4(x + 1)$. Como 5 é primo com 4, devemos ter $5 \mid (x + 1)$, isto é, $x \equiv -1$ (mód 5).

Resposta: $x \equiv -1$ (mód 5).

15.3) Calcule x sabendo que $6x + 3 \equiv 1$ (mód 10).

Solução: Vamos descobrir uma solução particular da congruência, isto é, vamos descobrir x_0 tal que $6x_0 + 3 \equiv 1$ (mód 10), isto é, tal que $10|(6x_0 + 3 - 1)$. Ora, $10|(6x_0 + 2)$ se e só se $5|(3x_0 + 1)$, isto é, se e só se existe y_0 tal que $3x_0 + 1 = 5y_0$, ou seja, $5y_0 - 3x_0 = 1$.

O algoritmo de Euclides nos fornece

$$\begin{cases} 5 = 1.3 + 2 \\ 3 = 1.2 + 1 \\ 2 = 2.1 \end{cases}$$

Daí, $1 = 3-1.2=3-1.(5-1.3) = 2.3-1.5$, isto é, $5(-1) - 3(-2) = 1$.

Logo, $x_0 = -2$ é uma solução.

Então, queremos achar x sabendo que

$6x + 3 \equiv 1$ (mód 10) e

$6(-2) + 3 \equiv 1$ (mód 10).

Subtraindo, $6(x + 2) \equiv 0$ (mód 10), isto é, $10|6(x + 2)$ ou, o que é o mesmo, $5|(x + 2)$.

Logo, devemos ter $x \equiv -2$ (mód 5).

Resposta: $x \equiv -2$ (mód 5)

15.4) Determine o resto da divisão de $(14.543)^{567}$ por 3.

Solução: $14.543 \equiv 2 \pmod 3$
$14.543^2 \equiv 2^2 \equiv 1 \pmod 3$
$14.543^3 \equiv 2 \times 1 \equiv 2 \pmod 3$
$14.543^4 \equiv 2 \times 2 \equiv 1 \pmod 3$
. . . .
$(14.543)^{567} \equiv 2 \pmod 3$

Resposta: 2

15.5) Institua um critério de divisibilidade do número

$(a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2 \cdot a_1 \cdot a_0)_{10}$
por 16. Verifique se $(32572432)_{10}$ é divisível por 16.

Solução:

$$\begin{aligned} 1 &\equiv 1 \pmod{16} \\ 10 &\equiv 10 \pmod{16} \\ 10^2 &\equiv 4 \pmod{16} \\ 10^3 &\equiv 8 \pmod{16} \\ 10^4 &\equiv 0 \pmod{16} \\ 10^5 &\equiv 0 \pmod{16} \\ &\dots\dots\dots\dots \end{aligned}$$

$$(a_n\, a_{n-1}\, a_{n-2} \dots a_2 .\, a_1 .\, a_o)_{10} = a_o + a_1 . 10 + a_2 . 10^2 + $$
$$+ a_3 10^3 + a_4 . 10^4 + \dots + a_n 10^n \equiv$$
$$\equiv a_o + 10a_1 + 4a_2 + 8a_3 + 0 + \dots + 0. \text{ (mód. 16)}.$$

Logo, $(a_n\ a_{n-1}\ a_{n-2} \dots a_2 . a_1 . a_o)_{10}$ é divisível por 16 se e só se $a_o + 10a_1 + 4a_2 + 8a_3$ o for.

Assim, $(32572432)_{10}$ é divisível por 16, pois $2 + 10.3 + 4.4 + 2.8 = 64$ é divisível por 16.

PROBLEMAS

A

1) Calcule:

a) $2 + 3$
b) $(-2) + 3$
c) $2 + (-3)$
d) $(-2) + (-3)$
e) 2.3
f) $(-2).3$
g) $(-2).(-3)$
h) $2.(-3)$
i) $5 + (-4) + (2) - (1)$
j) $(2) - (3)$
l) $(2) - (-3)$
m) $(-2) - (3)$
n) $(-2) - (-3)$
o) $(4) + (2).(-3)$
p) $5 - 2.3 + 1.(-4)$
q) $0.(-3)$

2) Determine os simétricos dos números:

a) 3
b) 0
c) (-4)

3) A adição de inteiros é distributiva em relação à multiplicação ?

4) Indique quais as afirmações verdadeiras:

a) $0 | 0$
b) $2 | 0$

c) $0 | 2$
d) $3 | 5$
e) $8 | 2$
f) $-2 | 8$

5) Indique quais as afirmações verdadeiras:

a) se $a < b$ e $b < c$, então, $a < c$
b) se $a \leqslant b$ e $b \leqslant c$, então, $a \leqslant c$
c) se $a \neq b$ e $b \neq c$, então, $a \neq c$
d) se $a | b$ e $b | c$, então, $a | c$

(Leis transitivas)

6) Indique quais as afirmações verdadeiras:

a) Para todo inteiro a, $a \leqslant a$
b) Para todo inteiro a, $a | a$

(Leis reflexivas)

7) Indique quais as afirmações verdadeiras:

a) Se $a | b$, então, $b | a$
b) Se $a < b$, então, $b < a$

(Leis simétricas)

8) Indique quáis as afirmações verdadeiras:

a) Se $a | b$ e $b | a$, então, $a = b$
b) Se $a \geqslant b$ e $b \geqslant a$, então, $a = b$

(Leis anti-simétricas)

9) Indique quais as afirmações verdadeiras

a) $-3 < -5$
b) $-3 > -5$
c) $-3 \geqslant -5$
d) $-3 \leqslant -5$
e) $4 \geqslant 4$

10) Determine todos os inteiros a tais que:

a) $|a| < 2$
b) $|a| < 4$
c) $|a| < 3$
d) $|a| < -1$
e) $|a| > 2$
f) $|a| > 3$
g) $|a| > -1$
h) $|a| \leqslant 2$
i) $|a| \geqslant 2$

11) Determine o MDC e o MMC entre:

a) 48 e 36
b) 144, 1024 e 108
c) -105, 42

12) (CICE-71)

n é um inteiro positivo. O MDC entre n e 20 é 4 e o MMC de n e 20 é 160. Podemos afirmar que:
a) $10 < n < 20$
b) $n < 10$
c) $n > 20$
d) Não se pode determinar o valor de n.
e) NRA.

13) Quando o inteiro x é dividido pelo inteiro y, o quociente é q e o resto é r. Qual é o resto da divisão de $x + 2qy$ por y?

a) 0 b) 2q c) 3q d) r e) 2r

14) O menor natural N para o qual $1260 . N = x^3$ sendo x um inteiro é:

a) 1050 b) 1260 c) 1260^2 d) 7350 e) 44.100

15) Indique quais as afirmações verdadeiras:

a) Se $a > b$ e $c > d$, então, $a + c > b + d$.
b) Se $a > b$ e $c > d$, então, $ac > bd$.
c) Se $a > 0$ e $c > d$, então, $ac > ad$.

16) (CICE-69-2c)

A equação $x^2 + y^2 = 13$
a) Não tem soluções inteiras.
b) Tem uma infinidade de soluções inteiras.
c) Tem duas soluções inteiras.
d) Tem apenas uma solução inteira.
e) NRA.

Hamilton Fábio Mota Medeiros.
Belém-PA, 27 de Maio de 2008

PROBLEMAS

B

1) O conjunto dos números naturais é fechado em relação às operações de adição e multiplicação?

2) O conjunto dos inteiros negativos é fechado em relação às operações de adição e multiplicação?

3) Represente-se por L a operação que a cada par (a,b) de inteiros associa o maior dos números a e b, isto é, $a \text{ L } b = a$ se $a \geqslant b$, e $a \text{ L } b = b$ se $b > a$.

   Analogamente, represente-se por s a operação que a cada par (a,b) de inteiros associa o menor dos números a e b, isto é, $a \text{ x } b = a$ se $a \leqslant b$, e $a \text{ s } b = b$ se $b < a$.

a) L e s são comutativas?
b) L e s são associativas?
c) L é distributiva em relação a s?
d) S é distributiva em relação a L?
e) L e s possuem elementos neutros?
f) Valem as "Leis do Corte" para L e s?
   (Isto é: se $c \text{ L } a = c \text{ L } b$, então, $a = b$?
   Se $c \text{ s } a = c \text{ s } b$, então, $a = b$?)

4) É verdadeira a afirmação
   "Se $a > b$ e $b > a$, então, $a = b$"?

5) O conjunto dos múltiplos de 4 é fechado em relação às operações de adição e multiplicação? E o dos múltiplos de 5?

6) São verdadeiras ou falsas as afirmações:
   a) " $|a + b| = |a| + |b|$ para quaisquer inteiros a e b"
   b) " $|a| = |-a|$ para todo inteiro a"

7) Prove que:

a) Se $a|b$ e $a|c$, então, $a|(b + c)$
b) Se $a|b$ e $a|c$, então, $a|(b.c)$

8) Determine o quociente e o resto:

a) Da divisão de 0 por 3
b) Da divisão de 1732 por 7
c) Da divisão de − 8.314 por 7
d) Da divisão de 1.623.000 por 101.000

9) (COMCITEC-73)

Dados $a \in \mathbb{Z}$, $b \in \mathbb{Z}$, onde $\mathbb{Z}$ é o conjunto dos inteiros, considere os números d e m, respectivamente máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum de a e b. Se $a = \{x \in \mathbb{Z} | x$ é divisor de $a\}$ e $B = \{x \in \mathbb{Z} | x$ é divisor de $b\}$. Então:

a) Quaisquer que sejam a e b, $m \notin A \cap B$.
b) $d \in A \cap B$ e se $y \in A \cap B$, então, $d \geqslant y$.
c) Se $x \in A \cap B$ e $y \in A \cap B$, então, $x\, y \in A \cap B$.
d) Se $x \in A \cup B$, então, $m \leqslant x$.
e) NRA.

10) (COMSART-73)

O produto do MMC pelo MDC de dois números múltiplos sucessivos de 11 é 5082. O maior destes números é dado então por

a) 77 b) 66 c) 11 d) 33 e) NRA

11) De um número N com dois algarismos, subtraímos o número com os algarismos invertidos e achamos para resultado um cubo perfeito, positivo. Então:

a) N não pode terminar em 5.
b) N pode terminar em qualquer algarismo exceto 5.

c) N não existe
d) Há exatamente 7 valores para N
e) Há exatamente 10 valores para N.

12) Um número de três algarismos a, b e c ($a > c$) é tal que, quando invertemos a ordem de seus algarismos e subtraímos o novo número do original, encontramos, na diferença, um número terminado em 4.

Essa diferença é igual a:

a) 954 b) 594 c) 454 d) 544
e) Impossível calcular.

13) Se $x \in \{0,1,2,\ldots,25\}$, para quantos valores de x $x^2 + 3x + 2$ é múltiplo de 6?

14) Prove que para quaisquer inteiros a e b, $|a.b| = |a|.|b|$

15) Sejam a, b, c inteiros, d o seu máximo divisor comum e m o seu mínimo múltiplo comum. Sob que condições é verdade que $|abc| = md$?

16) Determine qual dos conjuntos abaixo é fechado em relação à soma ou ao produto.

a) Conjunto de todos os inteiros m tais que alguma potência de m é divisível por 64.
b) Conjunto de todos os inteiros m tais que MDC $[m,7] = 1$.
c) Conjunto de todos os inteiros m tais que $m|24$
d) Conjunto de todos os inteiros m tais que $6|m$ e $24|m^2$.
e) Conjunto de todos os inteiros m tais que $9|21\ m$.

17) (CICE-67-2c)

O algarismo das unidades do número $(5837)^{649}$ é

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

18) Determine n natural para que $2^n + 1$ seja divisível por 3.

19) Prove que para todo natural n,
$5^n + 2.3^{n-1} + 1$ é múltiplo de 8.

20) Determine o resto da divisão de $(13.697)^{13.697}$ por 3.

21) Determine o resto da divisão de $(21.432)^{13.431} +$
$+ (15.123)^{6.781}$ por 7.

22) Determine o resto da divisão de $(31.241)^{6.581}.(12.313)^{6.421}$ por 6.

23) (EESC-66)

Assinale a afirmação falsa:

a) Todo número divisível pelo produto de dois outros é divisível por cada um deles.
b) Se um número primo divide o produto de três outros, então, ele divide pelo menos um deles.
c) Se um inteiro divide o produto de dois outros, então, ele divide pelo menos um deles.
d) Um divisor comum de dois inteiros divide a soma e a diferença deles.
e) Todo número não primo maior que 1 pode ser escrito de modo único como um produto de números primos.

24) Institua um critério de divisibilidade do número
$(a_n . a_{n-1} \dots a_2 . a_1 . a_0)_{10}$ por 7.

25) Sejam a e b ímpares. Prove que $a^3 - b^3$ é divisível por 2^n se e só se $a - b$ é divisível por 2^n.

26) Represente na base 7 o número 2.182.

27) Represente na base 10 o número $(65412)_7$.

28) É falsa ou verdadeira a afirmação:

"Se $ab \equiv ac$ (mód p) e $a \not\equiv 0$ (mód p), então, $b \equiv c$ (mód p)"

PROBLEMAS

C

1) (CICE-69-2c)

Seja $N = n \;\; + n + 41$, n inteiro positivo.

a) Para todo n inteiro positivo, N é um número primo
b) As raízes de $N = 0$ são números inteiros
c) A metade de N é a soma dos números inteiros de 1 até n.
d) $N < 1681$
e) NRA.

2) (MAPOFEI-73)

a) Defina números primos entre si.
b) Indique dentre os pares (311, 175), (51, 213), (831, 347) e (385, 252), quais os que são constituídos por números primos entre si.
c) Sendo a um número natural, mostre que $2a + 1$ e $3a + 1$ são primos entre si.

3) (EESC-65)

Prove que o produto de três inteiros consecutivos é sempre divisível por 6.

4) (EESC-66)

Determine todas as soluções inteiras da equação $(3x + y)(x + y) = p$, onde p é um número primo.

5) (ITA-65)

A diferença entre dois quadrados perfeitos é 68. Calcule-os.

6) A população de Itapipoca era um quadrado perfeito. Depois, ccm um aumento de 100 habitantes, a população passou a ser uma unidade maior que um quadrado perfeito. Depois, com outro aumento de 100 habitantes, a população voltou a ser um quadrado perfeito. A população original era um múltiplo de

   a) 3 b) 7 c) 9 d) 11 e) 17

7) Prove que, se x e y são inteiros, $2x + 3y$ é divisível por 17 se e só se $9x + 5y$ for divisível por 17.

8) O número de soluções inteiras da equação $2^x - 3^y = 55$ é:

   a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) NRA

9) Demonstre o teorema de Euclides:

   "O conjunto dos números primos é infinito".

10) Qual é a maior potência inteira de 10 que divide $1 \times 2 \times 3 \times \ldots \times 1000$?

11) Determine a_4 sabendo que $695 = a_1 + a_2 \,.\, 2! + a_3 \,.\, 3! + a_4 \,.\, 4! + \ldots$ onde a_k $(k = 1,2,3,4,\ldots)$ é um inteiro tal que $0 \leqslant a \leqslant k$ e $n! = 1 \times 2 \times \ldots xn$ $(n = 1,2,3,4,\ldots)$

    a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

12) (IME-72)

    Seja $b > 1$.

    a) Determine a representação de 1347 na base 10 e a de 929 na base 5.

    b) Determine em que base de numeração é verificada a igualdade $(2002)_b + (21)_5 = (220)_b + (1121)_b$.

    c) Demonstre que se $M = (14641)_b$, então, independentemente da base considerada, M é quadrado perfeito. Determine a representação de $\sqrt{M}$ na base $b + 1$.

    d) Determine a representação de $M = (14654)_b$ na base $b + 1$.

13) (IME-72)

Prove o teorema de Fermat:
"Se a é um inteiro e p é primo, então, $a^p \equiv a$ (mód p)."

14) Resolva as seguintes congruências:

a) $3x \equiv 2$ (mód 5)
b) $6x + 3 \equiv 4$ (mód 10)
c) $243x + 17 \equiv 101$ (mód 725).

15) Resolva o sistema de congruências

$$\begin{cases} 3x \equiv 2 \pmod{5} \\ 2x \equiv 1 \pmod{3} \end{cases}$$

16) (EN-73)

Quantas espécies distintas de polígonos regulares de 100 lados existem?

17) Determine a solução geral das equações

a) $2x + 3y = 4$
b) $17x + 19y = 23$
c) $15x + 51y = 41$

18) Calcule $\varnothing$ (144).

19) Resolva o sistema de congruências

$$\begin{cases} x \equiv 2 \pmod{5} \\ 3x \equiv 1 \pmod{8} \end{cases}$$

D

1) É verdadeira ou falsa a conjectura de Goldbach: "Todo número par maior que 2 pode ser expresso como a soma de dois números primos"?

2) Encontre um inteiro ímpar que seja igual à metade da soma dos seus divisores positivos.

3) Prove que há uma infinidade de primos p para os quais $p + 2$ é primo.

4) Demonstre que se $n > 2$, a equação $x^n = y^n + z^n$ não possui soluções inteiras positivas. (ÚLTIMO TEOREMA DE FERMAT).

RESPOSTAS

A

1) a) 5 b) 1 c) -1 d) -5 e) 6 f) -6.
g) 6 h) -6 i) 2 j) -1 l) 5 m) -5
n) 1 o) -2 p) -5 q) 0

2) a) -3 b) 0 c) 4

3) Não 4) a,b,f 5) a,b,d 6) a,b

7) NENHUMA 8) b 9) b,c,e

10) a) $-1,0,1$

b) $-3, -2, -1,0,1,2,3$
c,h) $-2, -1,0,1,2$
d) Impossível
e) Todos os inteiros, exceto os do item c.
f,i) Todos os inteiros, exceto os do item **a**.
g) Todos os inteiros.

11) a) 12 e 144 b) 4 e 27.648 c) 21 e 210

12) c

13) d

14) d

15) a,c

16) e

B

1) sim e sim 2) sim e não

3) a) sim b) sim c) sim d) sim e) não f) não

4) sim 5) sim e sim; sim e sim

6) a) falsa b) verdadeira

8) a) q = 0, r = 0 b) q = 247, r = 3 c) q = − 1188, r = 2 d) q = 16, r = 7000

9) B 10) A 11) D 12) B 13) 17

15) a,b,c devem ser, dois a dois, primos entre si.

16) a) soma e produto
b) produto
c) não é fechado
d) soma e produto
e) soma e produto.

17) D 18) n deve ser ímpar 20) 2

21) 2 22) 5 23) C

24) $(a_n\, a_{n-1} \ldots a_2\, a_1\, a_o)_{10}$ é divisível por 7 se e só se $(a_o + 3a_1 + 2a_2) - (a_3 + 3a_4 + 2a_5) + (a_6 + 3a_7 + 2a_8) - \ldots$ o for.

26) $(6235)_7$

27) 16.326

28) Falsa

C

1) E 2) b) (311,175), (831,347)

4) Se p = 2, o problema é impossível. Caso contrário, as soluções são:

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{p-1}{2}, \frac{3-p}{2}\right)$$

$$(x_2, y_2) = \left(\frac{1-p}{2}, \frac{3p-1}{2}\right)$$

$$(x_3, y_3) = \left(\frac{p-1}{2}, \frac{1-3p}{2}\right)$$

$$(x_4, y_4) = \left(\frac{1-p}{2}, \frac{p-3}{2}\right)$$

5) 16^2 e 18^2

6) E

8) B

10) 10^{249}

11) D

12) a) $(1347)_{10}$ e $(12204)_5$
b) b = 3
c) $\sqrt{M} = (100)_{b+1}$
d) $M = (10012)_{b+1}$

14) a) $x \equiv 4 \pmod{5}$
b) Impossível
c) $x \equiv 63 \pmod{725}$.

15) $x \equiv 14 \pmod{15}$.

16) 20

17)

a) $\begin{cases} x = 2 - 3t, & t \text{ inteiro} \\ y = 2t \end{cases}$

b) $\begin{cases} x = 19t - 2, & t \text{ inteiro} \\ y = 3 - 17\,t \end{cases}$

c) Impossível

18) 48

19) $x \equiv 27 \pmod{40}$

D

Lamentavelmente, ninguém conseguiu, até o presente momento, resolver estes problemas.

CAPÍTULO 2

POTÊNCIAS

1. DEFINIÇÃO

A potência de expoente m (m inteiro, m > 1) do número real a é definida como sendo o produto de m fatores iguais a a e é representada por a^m. O número a é chamado de base da potência.

Assim, $a^m = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{\text{m fatores.}}$

Exemplos:

1.1) $3^2 = 3 \times 3 = 9$

1.2) $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$

1.3) $(-1)^5 = (-1) \times (-1) \times (-1) \times (-1) \times$
$\times (-1) = -1$

1.4) $(-2)^2 = (-2) \times (-2) = 4$

A potência de expoente 2 do número a, a^2, é chamada de quadrado de a e a potência de expoente 3, a^3, é chamada de cubo de a.

Estende-se a definição de potência pondo-se:

I) $a^1 = a$ para todo a real.

II) $a^0 = 1$ para todo $a \neq 0$.

III) $a^{-m} = \dfrac{1}{a^m}$ para todo $a \neq 0$ e todo m inteiro positivo.

Exemplos:

1.5) $(-7)^1 = -7$

1.6) $3^0 = 1$

1.7) $4^{-2} = \dfrac{1}{4^2} = 16$

Observações:

I) Toda potência de 0 com expoente positivo é igual a 0. Não se definem 0^0 nem 0^m com m negativo.

II) As potências de expoentes pares dos números negativos são positivas e as de expoentes ímpares são negativas.

III) Toda potência de 1 é igual a 1.

IV) As potências de -1 são iguais a 1 ou -1, conforme o expoente seja par ou ímpar, respectivamente.

2. PROPRIEDADES

I) Para multiplicar potências de mesma base, basta conservar a base e somar os expoentes, isto é, $a^m \, . \, a^n = a^{m+n}$.

Assim, por exemplo:

$$7^4 \times 7^3 = 7^{4+3} = 7^7$$
$$5^3 \times 5^{-2} = 5^{3-2} = 5^1 = 5$$

II) Para dividir potências de mesma base, basta conservar a base e subtrair os expoentes, isto é,

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \ (a \neq 0).$$

Assim, por exemplo:

$$\frac{2^7}{2^3} = 2^{7-3} = 2^4 = 16$$

$$\frac{2^9}{2^{-2}} = 2^{9-(-2)} = 2^{11} = 2.048.$$

III) Para multiplicar potências de mesmo expoente, basta conservar o expoente e multiplicar as bases, isto é,

$$a^m \cdot b^m = (a.b)^m.$$

Assim, por exemplo:

$$2^4 \times 3^4 = (2 \times 3)^4 = 6^4$$

$$2^{-10} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{-10} = \left(2 \times \frac{1}{2}\right)^{-10} = 1^{-10} = 1.$$

IV) Para dividir potências de mesmo expoente, basta conservar o expoente e dividir as bases, isto é,

$$\frac{a^m}{b^m} = \left(\frac{a}{b}\right)^m \ (b \neq 0).$$

Assim, por exemplo;

$$\frac{4^6}{2^6} = \left(\frac{4}{2}\right)^6 = 2^6 = 64$$

$$\frac{12^5}{3^5} = \left(\frac{12}{3}\right)^5 = 4^5 = 1024.$$

I) Para calcular uma potência de uma potência, conserva-se a base e multiplicam-se os expoentes, isto é, $(a^m)^n = a^{m.n}$.

Assim, por exemplo:

$$(2^3)^2 = 2^{3\times 2} = 2^6 = 64$$
$$(2^{-1})^{-3} = 2^{(-1)\times(-3)} = 2^3 = 8.$$

Observações

1) Não confunda $-3^2 = -9$ com $(-3)^2 = 9$.

2) Não confunda $a^{3^2} = a^9$ com $(a^3)^2 = a^{3\times 2} = a^6$.

PROBLEMAS

A

1) (PUCSP-68) $(0,5)^4 =$

a) 0,125 b) 0,0125 c) 0,625 d) 0,00625 e) NRA

2) (PUCSP-68)

Se $1^m = 1^n$, então,

a) $m = n$ b) $m - n < 0$ c) $m - n > 0$
d) $m - n = 0$ e) NRA

3) (FEI-65) $5 . 10^8 . 4 . 10^{-3} =$

a) 20^6 b) $2 . 10^6$ c) $2 . 10^9$ d) $20 . 10^{-4}$ e) NRA

4) (PUCSP-68) $a^m . a^m =$

a) a^{m-m} b) a c) a^{2m} d) a^{m^2} e) NRA

5) (PUCSP-68)

Para $a \neq 0$, $a^m \div a^n =$

a) a^{m+n} b) a^{m-n} c) a^{n-m} d) $a^{n/m}$ e) NRA

6) Calcule $1^{1973} - 1^{1888} + (-1)^{1789}$

7) Calcule $0^{15} + 0$[illegible]

8) Calcule $2^3 + 3^3$

9) Calcule $\dfrac{0^4}{0^{-3}}$

10) Calcule $(-a^3)^4$

11) Calcule $[(-a)]^3$

12) Calcule $[(-a)^4]^3$

13) Calcule $\dfrac{2^5 \times 3^5}{18^4}$

14) Calcule $(3^5)^{-2} \,.\, (3^2)^3 \,.\, (3^{-1})^2$

15) Calcule $[(-5)^{-2} \div (5^3)^2] \times (-5)^{-1}$

16) Calcule $[9^2 \times 3^3 \times 27^{-}] \div [12 \times 2^{-5}]$

PROBLEMAS

B

1) (PUCSP-68)

Sendo n inteiro, $(-1)^n$ é igual a:

a) -1, se n é ímpar
b) -1, se n é par
c) 1, se n é ímpar
d) um número imaginário
e) NRA

2) (PUCSP-68)

Simplifique $\dfrac{x^{-1} + y^{-1}}{(xy)^{-1}}$ $(xy \neq 0)$

a) $x - y$ b) x c) $y + x$ d) y e) NRA

3) (UM-69)

Simplifique $\dfrac{2a^{-2}b^2c^0}{a^{-1} - b^{-1}}$ $(a \neq b, \quad abc \neq 0)$

a) $\dfrac{2b^3}{a(b-a)}$ b) $\dfrac{2(a-b)b^2}{a^2}$ c) $\dfrac{b^3}{2a(b-a)}$

d) $\dfrac{(a-b)b^2}{2a^2}$ e) $2b^2(a-b)$

4) (EESC-69)

$\dfrac{a^{-2} + b^{-2}}{a^{-1} + b^{-1}}$ $(ab \neq 0, \quad a + b \neq 0)$ é igual a:

a) $\dfrac{b^2 + a^2}{b + a}$ b) $\dfrac{b^2 + a^2}{ab(b+a)}$ c) $\dfrac{b + a}{ab}$

d) $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$ e) NRA

4) Demonstre as cinco propriedades da seção 2.

RESPOSTAS

A

1) E 2) E 3) B 4) C 5) B 6) -1

7) Impossível 8) 35 9) Impossível 10) a^{12}

11) $-a^{12}$ 12) a^{12} 13) $\frac{2}{27}$ 14) $\frac{1}{729}$

15) $-\frac{1}{5^9}$ 16) 8

B

1) A 2) C 3) A 4) B

CAPÍTULO 3

RAÍZES

1. RAIZ QUADRADA

O número real x é raiz quadrada do real a se e só se $x^2 = a$.
Assim, por exemplo, 3 é raiz quadrada de 9, pois $3 \ = 9$.
-3 também é raiz quadrada de 9, pois $(-3)^2 = 9$.

É claro que:

I) Os números negativos não possuem raiz quadrada (pois $x^2 = a$ com $a < 0$ não possui solução).

II) 0 possui uma única raiz quadrada que é 0 (pois $x^2 = 0$ se e só se $x = 0$).
Representa-se que a raiz quadrada de 0 é 0 escrevendo-se $\sqrt{0} = 0$.

Pode-se provar que:

III) Todo número positivo a possui exatamente duas raízes quadradas, que são simétricas.
A raiz positiva é representada por $\sqrt{a}$ e a negativa, por $-\sqrt{a}$.
Assim, $\sqrt{9} = 3$ e $-\sqrt{9} = -3$.

2. RAIZ CÚBICA

O número real x é a raiz cúbica do real a se e só se $x^3 = a$. Assim, por exemplo, 2 é raiz cúbica de 8, pois $2^3 = 8$ e -2 é raiz cúbica de -8, pois $(-2)^3 = -8$.

Representa-se que a raiz cúbica de a é x por $\sqrt[3]{a} = x$. Assim, $\sqrt[3]{8} = 2$ e $\sqrt[3]{-8} = -2$.

Pode-se provar que todo número real possui exatamente uma raiz cúbica.

3. RAIZ DE ÍNDICE n

O número real x é a raiz de índice n (n natural) do real a se e só se $x \; = a$.

Pode-se provar que:

I) Se n é par, os números negativos não possuem raiz de índice n, o zero possui uma única raiz de índice n que é zero.
($\sqrt[n]{0} = 0$) e os números positivos possuem duas raízes de índice n, simétricas (a positiva é representada por $\sqrt[n]{a}$ e a negativa por $\sqrt[n]{a}$).

II) Se n é ímpar, todo número real a possui, exatamente, uma raiz de índice n, que é representada por $\sqrt[n]{a}$.

Assim, por exemplo:

$\sqrt[4]{16} = 2$

$-\sqrt[4]{16} = -2$

$\sqrt[4]{-1}$ não existe

$\sqrt[5]{32} = 2$

$\sqrt[5]{-32} = -2$

4. PROPRIEDADES

I) Sejam a e b positivos, n natural.

Então $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$ e, se $b \neq 0$,

$$\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}.$$

Com efeito, sejam $\sqrt[n]{a} = x$ e $\sqrt[n]{b} = y$.

Então, $a = x^n$ e $b = y^n$ (x e y positivos).

Daí, $ab = x^n y^n = (xy)$ e

$$\frac{a}{b} = \frac{x^n}{y^n} = \left(\frac{x}{y}\right)^n$$

Logo, $\sqrt[n]{ab} = xy = \sqrt[n]{a}\ \sqrt[n]{b}$

e $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{x}{y} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}.$

Assim, por exemplo,

$$\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[3]{\frac{16}{2}} = \sqrt[3]{8} = 2.$$

II) Sejam a positivo, n natural e p inteiro. Então, $(\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p}$.

Com efeito, seja $\sqrt[n]{a} = x$. Então, $a = x^n$ (x positivo). Daí, $a^p = (x^n)^p = x^{pn} = (x^p)^n$. Logo, $\sqrt[n]{a^p} = x^p = (\sqrt[n]{a})^p$.

Assim, por exemplo,

$$(\sqrt{2})^2 = \sqrt{2^2} = 2 \qquad (\sqrt[3]{2})^6 = \sqrt[3]{2^6} = 4.$$

III) Sejam a positivo, n e p naturais. Então $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$.

Com efeito, seja $\sqrt[np]{a} = x$. Logo, $x^{np} = a$ $(x > 0)$. Daí, $\sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[p]{x^{np}}} = \sqrt[n]{x^n} = x = \sqrt[np]{a}$.

Assim, por exemplo,

$$\sqrt{\sqrt[3]{2}} = \sqrt[6]{2}.$$

IV) Sejam a positivo, k e n naturais e p inteiro, então, $\sqrt[kn]{a^{kp}} = \sqrt[n]{a^p}$

Com efeito, se $\sqrt[n]{a^p} = x$, então,

$x^n = a^p$ $(x > 0)$. Daí, $x^{kn} = (x^n)^k = (a^p)^k = a^{kp}$. Logo,

$\sqrt[kn]{a^{kp}} = x = \sqrt[n]{a^p}$.

Assim, por exemplo,

$$\sqrt[21]{a^{14}} = \sqrt[3.7]{a^{2 \cdot 7}} = \sqrt[3]{a^2}.$$

$$\sqrt[6]{2^3} = \sqrt[3.2]{2^{3 \cdot 1}} = \sqrt{2^1} = \sqrt{2}.$$

5. POTÊNCIAS DE EXPOENTES FRACIONÁRIOS

Seja $\frac{m}{n}$ uma fração irredutível $(n > 0)$.

Define-se $a^{m/n}$ pela fórmula

$$a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}.$$

Assim, por exemplo,

$$2^{-3/5} = \sqrt[5]{2^{-3}} = \sqrt[5]{\frac{1}{2^3}} = \frac{\sqrt[5]{1}}{\sqrt[5]{2^3}} = \frac{1}{\sqrt[5]{8}}$$

$$8^{-2/3} = \sqrt[3]{8^{-2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \sqrt[3]{\frac{1}{8^2}} = \frac{1}{4}\,.$$

Pode-se demonstrar que as cinco propriedades das potências estudadas no Capítulo 4 são verdadeiras ainda no caso dos expoentes serem fracionários, *desde que as bases sejam positivas.*

Assim, $\sqrt{2}\,\sqrt[3]{4} = 2^{1/2} \cdot 2^{2/3} = 2^{\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}} =$

$= 2^{\frac{7}{6}} = 2^{1+\frac{1}{6}} = 2^1 \cdot 2^{\frac{1}{6}} = 2\sqrt[6]{2}$

$\sqrt[5]{(\sqrt{2})^3} = [(2^{1/2})^3]\,\frac{1}{5} = 2^{\frac{1}{2}\times 3 \times \frac{1}{5}} =$

$= 2^{3/10} = \sqrt[10]{2^3} = \sqrt[10]{8}$.

6. RACIONALIZAÇÃO

Racionalizante de uma expressão que contém radicais é uma expressão que multiplicada pela mesma dá um resultado sem radicais.

Vejamos como achar racionalizantes em dois casos importantes.

I) O racionalizante de $\sqrt[n]{a^p}$ $(a > 0)$, n natural e p inteiro) é $\sqrt[n]{a^{n-p}}$.

Com efeito, $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{a^{n-p}} = \sqrt[n]{a^n} = a$.

Assim, por exemplo, os racionalizantes de

$\sqrt{a}$	são, respectivamente,	$\sqrt{a}$
$\sqrt[3]{a}$		$\sqrt[3]{a^2}$
$\sqrt[3]{a^2}$		$\sqrt[3]{a}$
$\sqrt[7]{a^3b^2x}$		$\sqrt[7]{a^4b^5x^6}$
$3\sqrt[3]{ab^2}$		$\sqrt[3]{a^2b}$
$2\sqrt[3]{a^3b^4x}$		$\sqrt[3]{b^2x^2}$

II) O racionalizante de $a\sqrt{A} + b\sqrt{B}$ é a sua expressão conjugada

$a\sqrt{A} - b\sqrt{B}$, e vice-versa.

Com efeito,

$(a\sqrt{A} + b\sqrt{B})\,(a\sqrt{A} - b\sqrt{B}) =$

$a^2A - ab\sqrt{AB} + ab\sqrt{AB} - b^2B = a^2A - b^2B.$

Assim, por exemplo, os racionalizantes de

$\sqrt{a} + \sqrt{b}$ são, respectivamente, $\sqrt{a} - \sqrt{b}$

$1 + \sqrt{2}$ $\qquad 1 - \sqrt{2}$

$\sqrt{3} + 2\sqrt{5}$ $\qquad \sqrt{3} - 2\sqrt{5}$

$\sqrt{3} - 2\sqrt{5}$ $\qquad \sqrt{3} + 2\sqrt{5}$

Diz-se que uma expressão está racionalizada se não contém radicais em denominadores.

Exemplos:

6.1) Racionalizando $\dfrac{2}{\sqrt{3}}$, encontramos

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

6.2) Racionalizando $\dfrac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1}$, encontramos

$$\frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} = \frac{3 + \sqrt{3}}{\sqrt{3} - 1} \times \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} + 1} =$$

$$= \frac{3\sqrt{3} + 3 + 3 + \sqrt{3}}{3 + \sqrt{3} - \sqrt{3} - 1} = \frac{6 + 4\sqrt{3}}{2} = 3 + 2\sqrt{3}.$$

PROBLEMAS

A

1) (PUCSP-68)

Simplificando $\sqrt{\frac{75}{12}}$ obtemos:

a) $\sqrt{\frac{5}{2}}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\sqrt{\frac{5}{3}}$ d) $\frac{5}{2}$ e) NRA

2) (PUCSP)-68)

Simplificando $\frac{\sqrt[3]{-1296}}{\sqrt[3]{-162}}$ obtemos:

a) 0 b) 3 c) 2 d) 1 e) NRA

3) (FEI-66)

$\sqrt[3]{a} + \sqrt[4]{a} =$

a) $\sqrt[7]{a}$ b) $\sqrt[12]{a^7}$ c) $\sqrt[7]{2a}$ d) $\sqrt[12]{a + a^4}$

e) NRA

4) (UM-69)

$\sqrt[5]{b} + \sqrt{b}$, $b \geqslant 0$, é sempre igual a:

a) $\sqrt[7]{b^2}$ b) $\sqrt[10]{b}$ c) $\sqrt[10]{b^2(1+b^3)}$ d) $\sqrt[7]{2b}$

e) NRA

5) (PUCSP-68) $(3^4)^{-3/2} =$

a) $3^{8/3}$ b) $\frac{1}{\sqrt{3}}$ c) 3^{-6} d) 3^{-3} e) NRA

6) (PUCSP-68) $\left(\frac{9}{25}\right)^{1/2} =$

a) $\frac{3}{5}$ b) $\frac{5}{3}$ c) $\frac{81}{625}$ d) $\frac{3}{25}$ e) NRA

7) (PUCSP-68)

Calcule: $\left(\frac{27}{125}\right)^{-1/3}$

a) $\frac{125}{2}$ b) $\frac{1}{5}$ c) 15 d) $\frac{5}{3}$ e) NRA

8) (PUCSP-68)

$(x^{1/6} \cdot y^{5/6})^{-6}$ $(xy \neq 0)$ é igual a:

a) $\frac{1}{xy^5}$ b) x^6y^6 c) $y^{-5}x$ d) $x^{-6}y^{-6}$ e) NRA

9) (PUCSP-68)

$x^{-1/3} \cdot x^{4/5}$ $(x \neq 0)$ é igual a:

a) $\sqrt[5]{x^7}$ b) $\sqrt{x^7}$ c) $\sqrt[3]{x^7}$ d) $\sqrt[10]{x^7}$ e) NRA

10) (PUCSP-68)

$x^{1/2} \cdot x^{-1/3}$ $(x \neq 0)$ é igual a:

a) $\sqrt[6]{x^5}$ b) $\sqrt[5]{x^6}$ c) $\sqrt[3]{x^2}$ d) $\sqrt[6]{x}$ e) NRA

11) Calcule $\sqrt{128} - \sqrt[3]{-1} + 6\sqrt{0} - \sqrt{24}$.

12) Calcule $4^{3/2} + 2^{1/2}$.

13) Calcule $\sqrt{27} + 2\sqrt{48} - 3\sqrt{108}$.

14) Calcule $\sqrt[3]{128} + \sqrt[3]{512} - \sqrt[3]{16}$.

15) Calcule $(\sqrt{2} - 1)\ (\sqrt{2} + 1)$.

16) Calcule $(\sqrt{2} - \sqrt{5})^2$.

17) Calcule $(\sqrt{3} + 2\sqrt{2})\ (2\sqrt{3} - \sqrt{2})$.

18) Sendo a, b e c positivos, simplifique:

a) $\sqrt{16a^4b^8c^2}$

b) $3\sqrt{9a^3b^5}$

c) $\sqrt{8a^5b^3c^2}$

d) $\sqrt{\dfrac{25\,a^3b^2}{16c^4}}$

e) $\sqrt[7]{2a^{15}b^{21}}$

19) Racionalize:

a) $\dfrac{1}{2 + \sqrt{3}}$ b) $\dfrac{1 - \sqrt{3}}{2 - \sqrt{3}}$ c) $\dfrac{2}{\sqrt[3]{4}}$

d) $\dfrac{1}{\sqrt[55]{x^3y^2}}$ (x, y positivos)

20) $81^{-(2^{-2})} =$

a) $\dfrac{1}{81}$ b) $\dfrac{1}{3}$ c) 3 d) 81 e) 81^4

21) Considere as afirmações:

I) $\sqrt{-4}\ \sqrt{-16} = \sqrt{(-4)\,.\,(-16)}$

II) $\sqrt{(-4)\,.\,(-16)} = \sqrt{64}$

III) $\sqrt{64} = 8$.

São falsas:

a) nenhuma b) I somente c) II somente

d) III somente e) I e III somente

22) (CICE-68-2c)

$$\left(\frac{-1}{125}\right)^{-2/3} =$$

a) $\frac{1}{25}$ b) $\frac{-1}{25}$ c) 25 d) -25 e) $25\sqrt{-1}$

23) (UM-69)

$$\frac{12}{\sqrt{7}+3} - \frac{5}{8-3\sqrt{7}} =$$

a) $81 - 4\sqrt{7}$ b) $22 + 21\sqrt{7}$ c) $-22 - 21\sqrt{7}$

d) $41\sqrt{7} - 81$ e) NRA

24) (USP-66)

$$\frac{(0{,}0081)^{-3/2} \, . \, (0{,}005)^{1/3}}{5^{-2/3}} =$$

a) $\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{10}{3}\right)^6$ b) $1{,}0125 \, . \, 10^{-14}$

c) $\sqrt[3]{2} \, . \, 10^{-1/3}$ d) $0{,}00123123\ldots$

e) NRA

25) (PUC-69)

O valor de

$$\left[\left(\frac{1}{5^{-2/3}}\right)^3 - \left(\frac{2^{20}}{2^{12}}\right)^{1/2}\right] - \left[\frac{3^{5/2}}{\sqrt{3}} - \frac{(5^{5/3})^4}{\sqrt[3]{5}}\right]$$

é:

a) 2 b) 3 c) 5 d) -2 e) NRA

26) (UCMG-65-3c)

Prove que $\sqrt[3]{7 + 5\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}$.

27) Sendo a positivo, calcule $\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a^{-4}}}$.

28) Sendo a positivo, calcule $(\sqrt[3]{a^{10}})^{12}$.

29) Calcule $\sqrt{(-1)^2}$.

30) Calcule $\sqrt[4]{(-1)^2}$.

31) (UGF-70)

Sendo x, y e z positivos, calcule

$$\frac{x^{a/2} \cdot y^a \cdot z^3}{y^2 \cdot z^a} - \frac{y^a \cdot z}{x^a \cdot y^2 \cdot z^a}$$

a) $x^{-a/2} \cdot y^{a-4} \cdot z^{4-a}$

b) $(x^{a/4} \cdot z^{1/2})^{2a}$

c) $x^{1/2} \cdot y \cdot z^3$.

d) $x^{3a/2} \cdot z^2$ e) NRA

B

1) Prove que se a e b são positivos e p e q são racionais, então:

a) $a^p \cdot a^q = a^{p+q}$

b) $\frac{a^p}{a^q} = a^{p-q}$

c) $(ab)^p = a^p \cdot b^p$

d) $\left(\frac{a}{b}\right)^p = \frac{a^p}{b^p}$

e) $(a^p)^q = a^{pq}$

2) Racionalize $\frac{1}{\sqrt{2} + \sqrt{3} - \sqrt{5}}$.

3) Calcule $\sqrt{a^2}$.

4) Calcule $\sqrt{a^4}$.

5) Calcule $\sqrt{2}\ \sqrt{2 - \sqrt{3}}\ (1 + \sqrt{3})$.

6) Calcule $\sqrt{2 - \sqrt{3}}\ (\sqrt{6} - \sqrt{2})\ (2 + \sqrt{3})$.

RESPOSTAS

A

1) D 2) C 3) E 4) E 5) C 6) A

7) D 8) A 9) E 10) D 11) $1 + 8\sqrt{2} - 2\sqrt{6}$

12) $8 + \sqrt{2}$ 13) $-7\sqrt{3}$ 14) $8 + 2\sqrt[3]{2}$ 15) 1

16) $7 - 2\sqrt{10}$ 17) $2 + 3\sqrt{6}$

18) a) $4a^2b^4c$ b) $9ab^2\sqrt{ab}$ c) $2a\,bc\sqrt{2ab}$

d) $\dfrac{5ab\sqrt{a}}{4c^4}$ e) $a^2b^3\sqrt[7]{2a}$

19) a) $2 - \sqrt{3}$ b) $-1 - \sqrt{3}$ c) $\sqrt[3]{2}$ d) $\dfrac{\sqrt[5]{x^2y^3}}{xy}$

20) B 21) B 22) C 23) C 24) A 21) C

27) $\sqrt[5]{a^2}$ 28) a^{40} 29) 1 30) 1 31) D

B

2) $\dfrac{3\sqrt{2} + 2\sqrt{3} + \sqrt{30}}{12}$ 3) $|a|$ 4) a^2 5) 2 6) 2

CAPÍTULO 4

POLINÔMIOS

1. TERMO ALGÉBRICO

Termo algébrico é o produto de um número (chamado coeficiente do termo) por potências de expoentes racionais de variáveis.

Assim, por exemplo, $4xy$ e $\frac{\sqrt{x}}{y} = x^{1/2}y^{-1}$, são termos algébricos cujos coeficientes são, respectivamente, 4 e 1.

Os termos algébricos são classificados de acordo com o quadro abaixo:

- racionais
  (todos os expoentes das variáveis são inteiros)
  - inteiros
    (nenhum expoente de variável é negativo)
  - fracionários
    (pelo menos um expoente de variável é negativo)
- irracionais
  (pelo menos um expoente de variável não é inteiro)

Assim, por exemplo:

I) $3\,x^3y$ é um termo algébrico racional inteiro.

II) $4x^2y^{-1}$ é um termo algébrico racional fracionário.

III) $-\dfrac{yx}{z} = -\,yxz^{-1}$ é um termo algébrico racional fracionário.

IV) $2y^3x^{-1/2}$ é um termo algébrico irracional.

V) $3y^5\sqrt[3]{x} = 3y^5x^{1/3}$ é um termo algébrico irracional.

VI) $\sqrt{2}xy$ é um termo algébrico racional inteiro.

VII) $3\,x^{\sqrt{2}}y$ não é um termo algébrico.

2. MONÔMIOS E POLINÔMIOS

Um monômio é um termo algébrico racional inteiro.

Um polinômio é um monômio ou uma soma de monômios, podendo um dos monômios se reduzir a uma constante diferente de zero.

Assim, por exemplo, $4xy$, $5xy - 3$, $4x + 2$ e ... $x^2 - xy + y^2$ são polinômios, sendo que $4xy$ é também um monômio.

Os polinômios de dois e três termos são chamados de binônômio e trinômio, respectivamente.

Assim, por exemplo, $5xy - 3x$ é um binômio e $x^2 - xy + y^2$ é um trinômio.

3. VALOR NUMÉRICO

O valor numérico de uma expressão é o número que se obtém quando se substituem as letras por números.

Assim, por exemplo:

I) O valor numérico de $P(x, y) = 3x + 4y - 7$ para $x = 1$ e $y = 3$ é $P(1,3) = -3 \times 1 + 4 \times 3 - 7 = 8$.

II) O valor numérico de $Q(x,y) = \dfrac{x - y}{x + y}$ para $x = 3$

$y = 2$ é $Q(3,2) = \dfrac{3 - 2}{3 + 2} = \dfrac{1}{5}$.

III) O valor numérico de $P(x) = x^2 + 1$ para $x = 3$ é $P(3) = 3 \ + 1 = 9 + 1 = 10$.

4. GRAU

Grau de um monômio é a soma dos expoentes de suas variáveis. Quando o monômio se reduz a uma constante diferente de zero diz-se que o seu grau é zero.

Assim, por exemplo, o grau de $7^2a^2xy^3$ é $2 + 1 + 3 = 6$.

Pode-se também considerar o grau em relação a uma determinada variável ou em relação a um determinado grupo de variáveis.

Assim, por exemplo, o grau de $7^2a^2xy^3$ é 2 em relação a a, 1 em relação a x, 3 em relação a y, 4 em relação a x e y, 5 em relação a a e y e 3 em relação a a e x.

Grau de um polinômio é o grau do seu monômio de mais alto grau.

Assim, por exemplo, $x^3 + 4x^2y^2 + y^3$ é um polinômio do quarto grau.

5. POLINÔMIO HOMOGÊNEO POLINÔMIO COMPLETO

Um polinômio é homogêneo se e só se todos os seus termos têm o mesmo grau.

Assim, por exemplo, $x^2 + 2xy - y^2$ é um polinômio homogêneo do segundo grau e $x^3 + xy^2 - y^3$ é um polinômio homogêneo do terceiro grau, mas ... $x^5 + xy^4 + x^3y^2 -$

$- y^5 + 4$ não é um polinômio homogêneo, pois seu último termo, 4, é do grau zero.

Um polinômio de uma variável do grau n é completo se e só se possui termos de todos os graus desde o grau 0 até o grau n, nenhum dos seus coeficientes sendo nulo.

Assim, por exemplo, $P(x) = x^3 - 5x^2 + 6x + 1$ é um polinômio completo do terceiro grau e $Q(x) = x^2 - 5x$ é um polinômio incompleto do segundo grau.

Observe o leitor que um polinômio completo de grau n possui $n + 1$ termos.

6. DIVISÃO DE POLINÔMIOS

Dados dois polinômios $P(x)$ e $D(x)$, de graus p e q, respectivamente, dividir $P(x)$ por $D(x)$ é encontrar dois polinômios $Q(x)$ e $R(x)$, denominados quociente e resto respectivamente, que satisfazem a

$P(x) = D(x) \times Q(x) + R(x)$

e tais que o grau de $R(x)$ seja menor que o grau de $D(x)$.

Para obter $Q(x)$ e $R(x)$:

I) Ordenam-se $P(x)$ e $D(x)$ segundo as potências decrescentes de x.

II) Divide-se o primeiro termo de $P(x)$ pelo primeiro termo de $D(x)$, obtendo-se o primeiro termo do quociente.

III) Multiplica-se $D(x)$ (o divisor) pelo primeiro termo do quociente e subtrai-se o resultado de $P(x)$ (o dividendo), obtendo-se o primeiro resto parcial.

IV) Com o primeiro resto parcial e o divisor $D(x)$ repetem-se as operações, obtendo-se o segundo termo do quociente e assim sucessivamente até se encontrar um resto de grau menor que o divisor.

Exemplos:

6.1) Dividir $P(x) = 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1$ por $D(x) = x^3 - 2x + 1$.

$$\begin{array}{l|l} 5x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 0x - 1 & x^3 + 0x^2 - 2x + 1 \\ \hline 5x^4 + 0x^3 - 10x^2 + 5x & 5x - 3 \\ \hline -3x^3 + 12x^2 - 5x - 1 & \\ -3x^3 + 0x - 11x + 2 & \end{array}$$

O quociente é $Q(x) = 5x - 3$, e o resto é $R(x) = 12x^2 - 11x + 2$.

Temos,

$5x^4 - 3x^3 + 2x^2 - 1 = (x^3 - 2x + 1)$
$(5x - 3) + (12x^2 - 11x + 2)$.

6.2) Dividir $P(x) = 2x^5 - x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 2$ por $D(x) = x^2 + x - 2$.

$$\begin{array}{r|l} 2x^5 - x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 2 & x^2 + x - 2 \\ \hline 2x^5 + 2x^4 - 4x^3 \qquad\qquad\qquad & 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1 \\ \hline -3x^4 - x^3 + 7x^2 - 5x + 2 & \\ -3x^4 - 3x^3 + 6x^2 \qquad\quad & \\ \hline 2x^3 + x^2 - 5x + 2 & \\ 2x^3 + 2x^2 - 4x \quad\; & \\ \hline -x^2 - x + 2 & \\ -x^2 - x + 2 & \\ \hline 0 \quad & \end{array}$$

O quociente é $Q(x) = 2x^3 - 3x^2 + 2x - 1$, e o resto é $R(x) = 0$.

Temos,

$2x^5 - x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 5x + 2 = (x^2 + x - 2)$
$(2x^3 - 3x^2 + 2x - 1)$.

7. SOMATÓRIOS

Pelo símbolo $\sum_{k=1}^{n} a_k$ que se lê, somatório dos a_k, variando k de 1 até n, representa-se a soma de todos os valores de a_k quando se atribuem a k os valores 1, 2, ..., n.

Assim, $\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots = a_n$.

Problemas:

7.1) Calcular $\sum_{k=1}^{4} k^2$.

Ora, $\sum_{k=1}^{4} k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 1 + 4 + 9 +$ $+ 16 = 30$.

Resposta: 30.

7.2) Calcular $\sum_{k=1}^{5} 2^k$.

Ora. $\sum_{k=1}^{5} 2^k = 2^1 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 = 2 + 4 +$ $+ 8 + 16 + 32 = 62$

Resposta: 62.

7.3) Escrever na notação de somatório

$xy^3 + x^2y^4 + x^3y^5 + \ldots + x^{20}y^{22}$.

Ora, a parcela genérica da soma é o produto de uma potência de x por uma potência de y. Como o expoente de x é variável, podemos chamá-lo de k (claro que k variará de 1 a 20). O expoente de y é sempre duas unidades maior que o de x; será, portanto, $k + 2$.

Então,

$$xy^3 + x^2y^4 + x^3y^5 + \ldots + x^{20}y^{22} = \sum_{k=1}^{20} x^k y^{k+2}.$$

É claro que se preferíssemos chamar o expoente de y de k, obteríamos para resposta

$$\sum_{k=3}^{22} x^{k-2}y.^{k}$$

Resposta: $\sum_{k=1}^{20} x^k y^k_+{}^2$ (ou, o que é a mesma coisa, $\sum_{k=3}^{22} x^{k-2}y^k$).

7.4) Escrever na notação de somatório

$x^2y^{20} - x^3y^{19} + x^4y^{18} - x^5y^{17} + \ldots + x^{20}y^2$

Ora, $x^2y^{20} - x^3y^{19} + x^4y^{18} - x^5y^{17} + \ldots + x^{20}y^2 =$
$= (-1)^2x^2y^{20} + (-1)^3x^3y^{19} + \ldots + (-1)^4x^4y^{18} +$
$+ (-1)^5x^5y^{17} + \ldots + (-1)^{20}x^{20}y^2$.

A parcela genérica da soma é o produto de uma potência de -1 por uma potência de x e uma potência de y.

Como expoente de -1 é variável, podemos chamá-lo de k (é claro que k variará de 2 até 20).

O expoente de x, por ser igual ao de -1, será k também.

Como a soma dos expoentes de -1 e y é sempre 22, o expoente de y será $22 - k$.

Então,

$$x^2y^{20} - x^3y^{19} + x^4y^{18} - x^5y^{17} + \ldots + x^{20}y^2\,2$$
$$= \sum_{k=2}^{20} (-1)^k x^k y^{22-k}.$$

Resposta: $\sum_{k=2}^{20} (-1)^k x^k y^{22-k}$.

PROBLEMAS

A

1) Determine o grau dos polinômios abaixo:

a) $7x^2y + 3y + 8xy^2 + 7$

b) $9x^2 + 4xyz^2 + 2z^2$

c) $2x + 4xy + 7x$

d) $3x^2 + 2xy - y^2$.

2) Determine a expressão geral de um polinômio homogêneo do segundo grau nas variáveis x, y e z.

3) Efetue:

a) $(x^2 - x + 1) \quad (x^2 + x - 1)$

b) $(x^4 + x^3 + x + x^2 + 1) \quad (x - 1)$

c) $(x + 1) \quad (x + 2) \quad (x + 3)$.

4) Seja $P(x) = x + \frac{1}{x}$, $(X \neq 0)$. Calcule:

a) $P(1)$

b) $P(-1)$

c) $P(a) \qquad (a \neq 0)$

d) $P(-x) \qquad (x \neq 0)$

e) $P\left(\frac{1}{x}\right) \qquad (x \neq 0)$

f) $P(x^2) \qquad (x \neq 0)$.

5) Seja $P(x) = 2x - 3$. Calcule $P[P(x)]$ e $P\{P[P(x)]\}$

6) (FIB-72)

O valor numérico de $\frac{6xy - 3x - 4y + 1}{3x - 2y - 3}$ para

$x = -\frac{1}{3}$ e $y = -\frac{1}{2}$ e:

a) 0 b) -2 c) 2 d) $-\frac{5}{3}$ e) 3

7) Divida:

a) $5x^4 - 3x^2 + 2x + 1$ por $x^2 - 2x + 3$

b) $4x^5 - 2x^3 + 3x + 2$ por $x^3 + 3x - 1$

c) $3x^2 - x + 3$ por $5 + x - x^2$

d) $x^4 - 2x^3 - 14x^2 + 8$ por $x^4 - 8x^3 + 20x^2 - 16x - 32$

e) $x^3 - 2y^3 + 2x^2y - xy^2 + x^2 - y^2$ por $x + y$

f) $x^2 - y + z^2 + 2zx + x + z - y$ por $x - y + z$.

B

1) (ITA-66)

Sendo $P(2x+1) = x$,

Então,

a) $P(x) = \dfrac{x-1}{2}$

b) $P(x) = 2x + 1$

c) NRA.

2) Escreva com a notação de somatório:

a) $x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$

b) $a_0x^5 + a_1x^4 + a_2x_3 + a_3x^2 + a_4x + a_5$

c) $x^7 - x^6 + x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1$

d) $a_0x^4 - a_1x^3z + a_2x^2z^2 - a_3xz^3 + a^4$

e) $x^2 + x^4 + x^6 + \dots + x^{100}$

f) $x - x^3 + x^5 - x^7 + \dots - x^{199}$.

3) Calcule:

a) $\sum_{j=1}^{5} (j^2 - j + 1)$

b) $\sum_{k=1}^{n} 1$

c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k - a_{k-1})$

4) Indique quais as fórmulas verdadeiras.

a) $\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k + \sum_{k=1}^{n} b_k$

b) $\sum_{k=1}^{n} (a_k \cdot b_k) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k$

c) $\sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} a_k\right]^2$

d) $\sum_{k=1}^{n} p \cdot a_k = p \sum_{k=1}^{n} a_k$ (p independente de k)

e) $\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} a_j$

f) $\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} akj = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} a_{kj}$

5) (ITA-68)

$(a_1 + a_2 + \ldots + an)^2 =$

a) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + 4 \sum_{j=1}^{n} a_j$

b) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} a_1 \cdot a_j\right)$

c) $\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \frac{n(n-1)}{2} \sum_{j=1}^{n} a_j$

d) $\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1} a_1 \cdot a_j\right)$

e) NRA.

RESPOSTAS

A

1) a) 3 b) 4 c) 2 d) 2

2) $Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dyz + Ezx + Fxy$

3) a) $x^4 - x^2 + 2x - 1$

b) $x^5 - 1$

c) $x^3 + 6x^2 + 11x + 6$

4) a) 2 b) -2 c) $a + \frac{1}{a}$

d) $-x - \frac{1}{x}$ e) $\frac{1}{x} + x$ f) $x^2 + \frac{1}{x^2}$

5) $4x - 9$ e $8x - 21$

6) D

7) a) $Q = 5x^2 + 10x + 2$ $R = -24x - 5$

b) $Q = 4x^2 - 14$ $R = 4x^2 + 45x - 12$

c) $Q = -3$ $R = 2x + 18$

d) $Q = 1$ $R = 6x^3 - 34x^2 + 16x + 40$

e) $Q = x^2 + xy - 2y^2 + x - y$ $R = 0$

f) $Q = x + y + z + 1$ $R = 0.$

B

1) A

2) a) $\sum_{k=0}^{5} x^k$ b) $\sum_{k=0}^{5} a_k x^{5-k}$

c) $\sum_{k=0}^{7} (-1)^{k+1} x^k$ d) $\sum_{k=0}^{4} a_k x^{4-k}(-z)^k$

e) $\sum_{k=1}^{50} x^{2k}$ f) $\sum_{k=1}^{100} (-1)^{k-1} x^{k2-1}$

3) a) 45

b) n

c) $a_n - a_o$

4) a, d, e, f

5) D.

CAPÍTULO 5

FATORAÇÃO

1. FATORAÇÃO.

Fatorar um polinômio é transformá-lo num produto de polinômios de graus menores que o grau do polinômio original.

2. EVIDENCIAÇÃO

Para fatorar um polinômio cujos termos possuem um fator comum, basta evidenciá-lo, isto é, usar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição,

$ab + ac = a(b + c)$.

Exemplos:

2.1) $xy + xz = x(y + z)$

2.2) $x^2y + x^2z + x^2w^3 = x^2(y + z + w^3)$

2.3) $3a^2b + 6ab^2 = 3ab(a + 2b)$

2.4) $3^2a(m - n) + 2b(m - n) = (m - n)(3a^2 + 2b)$.

3. GRUPAMENTO

A chamada fatoração por grupamento nada mais é que a aplicação reiterada do processo anterior.

Exemplos:

3.1) $ab + ac + bd + cd = a(b + c) + d(b + c) =$
$= (b + c)\ (a + d)$

3.2) $x^2 + ax - bx - ab = x(x + a) - b(x + a) =$
$= (x + a)\ (x - b)$

3.3) $x^3 + x^2 + 2x + 2 = x^2(x + 1) + 2(x + 1) =$
$= (x + 1)\ (x^2 + 2)$

3.4) $x^4 + x^3 - x - 1 = x^3(x + 1) - (x + 1) =$
$= (x + 1)\ (x^3 - 1).$

4. PRODUTOS NOTÁVEIS

É útil memorizar as seguintes fórmulas:

$a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$
$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
$a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

Exemplos:

4.1) $x^2 - 9 = (x + 3)\ (x - 3)$

4.2) $x^3 - 8 = (x - 2)\ (x^2 + 2x + 4)$

4.3) $x^3 + 27 = (x + 3)\ (x^2 - 3x + 9)$

4.4) $(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$

4.5) $(2x - 1)^2 = 4x^2 - 4x + 1$

4.6) $(x + 2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$

4.7) $(x - 3)^3 = x^3 - 9x^2 + 27x - 27.$

PROBLEMAS

A

FATORE

1) $4x^3y - 12x^2y^2 + 8xy^8$
2) $x^4 - ax^3 + bx^2 + cx$
3) $3x^5y^3 - 21x^4y^2 + 27x^3y^4$
4) $25(a^2 + b + c)^5 - 4(a^2 + b + c)^3$
5) $3x(x^2 + 2xy + y^2) - y(x + y)^3$
6) $(a + b)(m^2 - 2mn + n^2) + (a + b)^3(m - n)^3$
7) $bm + mn + ab + an$
8) $bc + by + cy + y^2$
9) $abx - aby + cxd - cdy$
10) $x^4 - a^2x^2 - b^2x^2 + {}^2a^2b$
11) $x^4 - x^2 - x - 1$
12) $x^5 - x^3 + x - 1$
13) $x^2 - 10x + 25$
14) $x^4 - 1$
15) $ab^2 + d(c - b) - abc$
16) $1 - (a - b)^2$
17) $a^2 - b^2 + 2bc - c^2$
18) $x^2 - 2xy + y^2 - z^2$
19) $a^3 + 64b^3$
20) $x^3 - 1$
21) $x^4 - x^3 + x^2 - 1$

Calcule:

22) $\dfrac{x^6 + 2x^3y^3 + y^6}{x^6 - y^6}$

23) $\dfrac{x^3 + 3x^2 + 4x + 12}{x^3 + 4x^2 + 4x + 16}$

24) $\dfrac{1}{x + 1} + \dfrac{1}{x + 2} - \dfrac{1}{(x + 1)\ (x + 2)}$

25) $\dfrac{2}{(x^2 - 1)^2} - \dfrac{1}{2x^2 + 4x + 2} - \dfrac{1}{1 - x^2}$

26) $\dfrac{x^2}{x^2 - 1} - \dfrac{x}{x - 1} + \dfrac{x}{x + 1}$

27) (UFRJ-62)

Divida $x^9 - a^9$ por $x^3 - a^3$.

28) (EPUSP-65)

$\dfrac{a^{-4} - b^{-3}}{a^{-2} - b^{-2}}$ vale,

para $a \neq \pm b$ e $ab \neq 0$

a) $a^{-3} - b^{-3}$ b) $a^{-2} - b^{-2}$ c) $a^{-2} + b^{-2}$

d) $a^2 + b^2$ e) NRA.

29) (UFRJ-69)

Calcule

$$\frac{a}{(a - b)\,(a - c)} + \frac{b}{(b - c)\,(b - a)} + \frac{c}{(c - a)\,(c - b)}$$

30) (EMMOP-61)

Calcule

$$\frac{(x + y)^2 + (y + x)^2 + (z + x)^2 - (x^2 + y^2 + z^2)}{(x + y + z)^2}$$

31) (PUC-69)

Para $1 + 4xy \neq 0$ e $1 + 2x \neq 0$,

$$\frac{\dfrac{y + x}{1 + 4xy} - x}{1 + \dfrac{2x - 4xy}{1 + 4xy}} =$$

a) $y(1 + 2x)$ b) $y(1 - 2x)$ c) $y(2x - 1)$

d) $-y(2x + 1)$ e) NRA.

32) (UFRJ-63)

Simplifique $\dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x + 1}$.

33) (UFRJ-69)

Calcule $\left(x - 3 + \dfrac{5x}{2x - 6}\right) \div \left(2x - 1 + \dfrac{15}{x - 3}\right)$.

34) (ITA-60)

Afirmo que $\dfrac{1}{x^2 - 1} = \dfrac{1}{2(x + 1)} + \dfrac{1}{x - 1}$.

Isso é verdadeiro ou falso?

35) (UCMG-65)

Simplifique

$(a + b + c)^3 - (a + b - c)^3 - (b + c - a)^3 -$

$- (c + a - b)^3$.

36) (UCMG-65-3c)

Calcule $(a + b - c)^3$

37) (CESCEA-73)

Considere as afirmações:

I) $\dfrac{x^4 + 5x^2 + x - 7}{x^2 - 1} = \dfrac{x^3 + x^2 + 6x + 7}{x + 1}$

Para todo $x \neq \pm 1$

II) $\dfrac{x^4 + 1}{x^2 - 1} = x^2 - 1$ para todo $x \neq \pm 1$

III) $\dfrac{(x + 3)\ (x + 1)}{x^2 + 1} = \dfrac{x + 3}{x + 1}$ para todo $x \neq \pm 1$

Então: a) I, II e III são verdadeiras

b) I e II são falsas

c) II e III são falsas

d) NRA

38) Demonstre as sete fórmulas citadas na seção 4 deste capítulo.

39) (FEI-67)

Simplifique $\dfrac{\sqrt[3]{9} - 1}{\sqrt[3]{3} - 1}$

40) (FEI-67)

$\dfrac{\sqrt[3]{4} - 1}{\sqrt[3]{2} - 1}$ é igual a:

a) $1 + \sqrt[3]{2}$ b) $1 - \sqrt[3]{2}$ c) $1 + \sqrt[3]{4}$ d) $1 - \sqrt[3]{4}$

e) NRA.

41) (UC-67)

A expressão $x^3 - 3x^2y + 3xy^2 - y^3$, para $x = a + 1$ e $y = a - 1$, assume o valor

a) $a^2 - 1$ b) 8 c) $8a^3$ d) 0 e) NRA

PROBLEMAS

B

1) FATORE:

$4b^2c^2 - (a^2 - b^2 - c^2)^2$

2) (CICE-69)

Sendo a, b e c números distintos,

$$\frac{2}{b-c} + \frac{b-c}{(c-a)\ (a-b)} + \frac{2}{c-a} + \frac{c-a}{(a-b)(b-c)} + \frac{2}{a-b} + \frac{a-b}{(b-c)(c-a)} =$$

a) $a + b + c$ b) $a - b$ c) $(a - b)\ (b - c)\ (c - a)$

d) $2abc$ e) 0

3) Calcule

$$\frac{\dfrac{1}{1-x} - \dfrac{1}{1+x}}{\dfrac{x}{1-x} + \dfrac{1}{1+x}}$$

4) Calcule

$$\frac{3}{1 + \dfrac{3}{1 + \dfrac{3}{1-x}}}$$

5) Calcule

$$\frac{a^2 - ab}{a^3 - b^3} \cdot \frac{a^2 + ab + b^2}{a + b} - \left(\frac{2a^3}{a^3 + b^3} - 1\right) \cdot \left(1 - \frac{2ab}{a^2 + ab + b^2}\right)$$

6) Calcule $\dfrac{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}+$

$$+\ \frac{\sqrt{x^2+1}-\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{x^2+1}+\sqrt{x^2-1}}$$

7) Prove que se $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+y+z}$,

então, $x^2(y+z)+y^2(x+z)+z^2(x+y)=-2xyz$.

8) Demonstre a identidade de Bramagupta-Lagrange

$(a^2+b^2)(c^2+d^2)=(ad-bc)^2+(ac+bd)^2$

9) Demonstre a identidade de Platão

$(a^2+b^2)^2=(a^2-b^2)^2+(2ab)^2$

10) Demonstre as identidades de Cauchy

$(x+y)^3-(x^3+y^3)=3xy(x+y)$

$(x+y)^5-(x^5+y^5)=5xy(x+y)(x^2+xy+y^2)$

11) Prove que se $\dfrac{x}{p(y+z)}=\dfrac{y}{q(x+z)}=\dfrac{z}{r(x+y)}$,

então, $\dfrac{x(y-z)}{p}+\dfrac{y(z-x)}{q}+\dfrac{z(x-y)}{r}=0$.

12) Prove que se $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+d)^2=$
$=4(ab+bc+cd)$, então, $a=b=c=d$

13) Prove que se $x^2-3xy+2y^2+x-y=0$

e $x^2-2xy+y^2-5x+7y=0$, então,

$xy-12x+15y=0$

14) (IEI-65-2c)

Calcule $\sqrt{a^2+4ab+6ac+4b^2+12bc+9c^2}$

15) (ENCE-67)

Determine x real tal que

$x^3 + 3x^2 + 3x - 1 = 0$

16) (UFJF-67)

Determine x real tal que

$x^3 - 3x^2 + 3x + 1 = 0$

17) (EN-70)

Se $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = 3$, então, $x^3 + \frac{1}{x^3}$ é igual a:

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 c) 4.

18) $x^2 - y^2 - z^2 + 2yz + x + y - z$

a) Admite $-x + y + z$ por fator.

b) Admite $x - y - z + 1$ por fator.

c) Admite $x + y - z + 1$ por fatór.

d) Admite $x - y + z + 1$ por fator.

e) NRA.

19) Seja $a \neq 0$. $\left(\frac{a}{a+y} + \frac{y}{a-y}\right) \div \left(\frac{y}{a+y} - \frac{a}{a-y}\right) = -1$

a) Para todos, exceto dois, valores de y

b) Só para dois valores de y.

c) Para todos os valores de y.

d) Só para um valor de y.

e) Para nenhum valor de y.

20) $1 - \cfrac{1}{1 + \cfrac{a}{1 - a}}$ é igual a

a) a, se $a \neq 0$

b) 1, para todo a

c) a, se $a \neq 1$

d) $1 - a$, para todo a

e) a, se $a \neq 1$

21) Quando $1 - y$ é usado como aproximação de $\frac{1}{1 + y}$ ($|y| < 1$) a razão do erro cometido para o valor exato é:

a) y b) y^2 c) $\frac{1}{1+y}$ d) $\frac{y}{1+y}$ e) $\frac{y^2}{1+y}$

22) (EESC-60)

Racionalize

$$\frac{1 + \sqrt[3]{2}}{1 + \sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4}}$$

23) (FEI-68)

Racionalize $\frac{1}{\sqrt[3]{2} - 1}$

a) $\sqrt[3]{2} + 1$ b) $\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{4} + 1$ c) $\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{2} + 1$

d) $\sqrt[3]{2}$ e) NRA

PROBLEMAS

C

1) Expresse como um produto de fatores de, no máximo, grau dois:

   a) $x^8 - 1$

   b) $x^6 + y^6$

   c) $x^4 + x^2 + 1$

   d) $a^2(b - c) + b^2(c - a) + c^2(a - b)$

   e) $a^3(b - c) + b^3(c - a) + c^3(a - b)$

   f) $a^3(b - c)^3 + b^3(c - a)^3 + c^3(a - b)^3$

   g) $x^4 + a^4$

   h) $(x - y)^3 + (y - z)^3 + (z - x)^3$

2) Fatore:

   a) $x^5 + x + 1$

   b) $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$

RESPOSTAS

A

1) $4xy\,(x^2 - 3xy + 2y^7)$

2) $x\,(x^3 - ax^2 + bx + c)$

3) $3x^3y^2\,(x^2y - 7x + 9y^2)$

4) $(a^2 + b + c)^3\,(5a^2 + 5b + 5c + 2)\,(5a^2 + 5b + 5c - 2)$

5) $(x + y)^2\,(3x - xy - y^2)$

6) $(a + b)\,(m - n)\,[1 + (a + b)^2\,(m - n)]$

7) $(m + a)\,(b + n)$

8) $(b + y)\,(c + y)$

9) $(x - y)\,(ab + cd)$

10) $(x + a)\,(x - a)\,(x + b)\,(x - b)$

11) $(x + 1)\,(x^3 - x^2 - 1)$

12) $(x - 1)\,(x^4 + x^3 + 1)$

13) $(x - 5)^2$

14) $(x - 1)\,(x + 1)\,(x^2 + 1)$

15) $(ab - d)\,(b - c)$

16) $(1 + a - b)\,(1 - a + b)$

17) $(a + b - c)\,(a - b + c)$

18) $(x - y + z)\,(x - y - z)$

19) $(a + 4b)\,(a^2 - 4ab + 16b^2)$

20) $(x - 1)\,(x^2 + x + 1)$

21) $(x - 1)\,(x^3 + x + 1)$

22) $\dfrac{x^3 + y^3}{x^3 - y^3}$ para $x \neq \pm y$

23) $\frac{x + 3}{x + 4}$ para $x \neq -4$

24) $\frac{2}{x + 2}$ para $x \neq -1$ e $x \neq -2$

25) $\frac{1}{2(x - 1)^2}$ para $x \neq \pm 1$

26) $\frac{x^2 - 2x}{x^2 - 1}$ para $x \neq \pm 1$

27) $x^6 + a^3x^3 + a^6$ $(x \neq a)$

28) C

29) 0 $(a \neq b,\ b \neq c$ e $c \neq a)$

30) 1 $(x + y + z \neq 0)$

31) B

32) $\frac{x - 1}{x + 1}$ $(x \neq -1)$

33) $\frac{1}{2}$ $(x \neq 3)$

34) Falso

35) 24 abc

36) $a^3 + b^3 - c^3 + 3a^2b - 3a^2c + 3ab^2 - 3b^2c + 3ac^2 +$
$+ 3bc^2 - 6abc$

37) C

39) $\sqrt[3]{3} + 1$

40) A

41) B

B

1) $(a+b+c)(b+c-a)(a+b-c)(a+c-b)$

2) E

3) $\dfrac{2x}{x^2+1}$ $(x \neq \pm 1)$

4) $\dfrac{3(x-4)}{4x-7}$ $(x \neq 1, x \neq 4, x \neq \dfrac{7}{4})$

5) $\dfrac{b}{a+b}$ $(a \neq \pm b)$

6) $2x^2$ $(x^2 \geqslant 1)$

14) $|a+2b+3c|$ 15) $\sqrt[3]{2}-1$ 16) $1-\sqrt[3]{2}$ 17) A

18) D 19) A 20) E 21) B 22) $\sqrt[3]{4}-1$ 23) B

C

1) a) $(x-1)\ (x+1)\ (x^2+1)\ (x^2+\sqrt{2}x+1)$
$(x^2-\sqrt{2}x+1)$

b) $(x^2+y^2)(x^2+\sqrt{3}xy+y^2)(x^2-\sqrt{3}xy+y^2)$

c) $(x^2+x+1)\ (x^2-x+1)$

d) $(b-c)\ (a-b)\ (a-c)$

e) $(a+b+c)\ (a-b)\ (a-c)\ (b-c)$

f) $3abc\ (b-c)\ (c-a)\ (a-b)$

g) $(x^2+\sqrt{2}\,ax+a^2)\ (x^2-\sqrt{2}\,ax+a^2)$

h) $3(y-z)\ (z-x)\ (x-y)$

2) a) $(x^2+x+1)\ (x^3-x^2+1)$

b) $(x+y+z)\ (x^2+y^2+z^2-yz-zx-xy)$

CAPÍTULO 6

EQUAÇÃO E BINÔMIO DO PRIMEIRO GRAU

1. EQUAÇÕES E IDENTIDADES

Uma identidade é uma igualdade que se verifica para todos os valores das variáveis.

Assim, por exemplo, $x + y = y + x$ e $2x - (x - 1) = x + 1$ são identidades.

Uma equação é uma igualdade que se verifica apenas para alguns valores das variáveis.

Assim, por exemplo, $x + 3 = 5$ (que se verifica somente para $x = 2$) e $x^2 + y = 15$ (que se verifica para $x = 3$ e $y = 6$) são equações.

Dizemos que $x = 2$ é raiz da equação $x + 3 = 5$ e que o par ordenado (3, 6) é uma solução da equação $x^2 + y = 15$.

Uma equação do primeiro grau na incógnita x é uma equação da forma $ax + b = 0$, a e b constantes, $a \neq 0$.

2. PRINCÍPIOS GERAIS PARA A SOLUÇÃO DE EQUAÇÕES

I) Numa equação podemos transpor um termo (isto é, mudá-lo de um membro da equação para o outro), desde que o multipliquemos por -1.

Em suma, $a + b = c \Leftrightarrow a = c - b$.

Com efeito, $a + b = c \Rightarrow a + b + (-b) = c + (-b) \Rightarrow a + 0 = c - b \Rightarrow a = c - b$ e, reciprocamente, $a = c - b \Rightarrow a + b = c - b + b \Rightarrow a + b = c + 0 \Rightarrow a + b = c$.

II) Uma equação não se altera quando se multiplicam ambos os membros por um mesmo número diferente de zero.

Em suma, se $k \neq 0$, $a = b \Rightarrow ka = kb$.

Com efeito, se $k \neq 0$, $a = b \Rightarrow ka = kb$ e, reciprocamente, $ka = kb \Rightarrow \frac{1}{k} \cdot ka = \frac{1}{k} \cdot kb \Rightarrow a = b$.

Problemas:

2.1) Resolva $2x + 4 = 3x + 6$.

Solução: Transpondo, resulta $2x - 3x = 6 - 4$, isto é, $-x = 2$. Multiplicando por -1, vem $x = -2$.

Resposta: $x = -2$.

2.2) Resolva a equação $2x - 7 = 4x + 15$.

Solução: Transpondo, resulta $2x - 4x = 7 + 15$, isto é, $-2x = 22$. Dividindo por (-2) (ou seja, multiplicando por $-\frac{1}{2}$) vem $x = -11$.

Resposta: $x = -11$.

2.3) Resolva a equação $\frac{x}{3} + 2 + \frac{5x}{12} = \frac{3x - 7}{4}$.

Solução: Multiplicando por 12 para eliminar os denominadores (repare o leitor que 12 é o MMC dos denominadores), obtemos

$4x + 24 + 5x = 3 \ (3x - 7)$, isto é,
$9x + 24 = 9x - 21$.

Transpondo, $9x - 9x = -24 - 21$, isto é, $0 = -45$.
Não há evidentemente nenhum valor de x que satisfaça a igualdade acima.
Resposta: Impossível.

2.4) Resolva a equação $\frac{2x}{x-1} - \frac{3x}{x+1} = \frac{5-x^2}{x^2-1}$

Solução: Multiplicando por $x^2 - 1$ (que é o MMC dos denominadores), o que pode ser feito se $x^2 - 1 \neq 0$, obtemos

$$\frac{2x(x^2-1)}{x-1} - \frac{3x(x^2-1)}{x+1} = \frac{(5-x^2)(x^2-1)}{x^2-1}$$

Daí, $2x(x+1) - 3x(x-1) = 5 - x^2$.
Isto é, $2x^2 + 2x - 3x^2 + 3x = 5 - x^2$,
$-x^2 + 5x = 5 - x^2$
$x^2 - x^2 + 5x = 5$
$5x = 5$
$x = 1$
Mas este valor não satisfaz a condição $x^2 - 1 \neq 0$.
Resposta: Impossível.

2.5) Resolva a equação

$$\frac{4}{x-2} + \frac{1}{x+2} = \frac{3}{x^2-4}$$

Solução: Multiplicando por $x^2 - 4$ (que é o MMC dos denominadores), o que pode ser feito se $x^2 - 4 \neq 0$, obtemos

$4(x+2) + (x-2) = 3$
$4x + 8 + x - 2 = 3$
$5x + 6 = 3$
$5x = 3 - 6$
$5x = -3$
$x = -\frac{3}{5}$.

Repare o leitor que para este valor de x, $x^2 - 4 \neq 0$.

Resposta: $x = -\frac{3}{5}$.

2.6) Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} 4x - 3y = 5 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$$

(isto é, determine a solução simultânea das duas equações.)

Solução: A primeira equação fornece

$4x = 3y + 5$, isto é, $x = \frac{3y + 5}{4}$

Como a segunda equação deve ser satisfeita, obtemos

$$\frac{3y + 5}{4} + 2y = 4$$

Multiplicando por 4, vem $3y + 5 + 8y = 16$, isto é,

$$11y = 16 - 5$$

$$11y = 11$$

$$y = 1.$$

Como $x = \frac{3y + 5}{4}$, resulta $x = \frac{3.1 + 5}{4} = 2$

Resposta: $x = 2$, $y = 1$.

3. O PRINCÍPIO DO FATOR COMUM

$AB = AC \quad A = 0 \quad$ ou $\quad B = C$

Com efeito, $AB = AC \Leftrightarrow AB - AC = 0 \Leftrightarrow A(B - C) \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow A = 0$ ou $B - C = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = C$

Repare o leitor que o princípio acima nos ensina como resolver equações onde há um fator comum aos dois membros. Estas equações se desdobram em duas outras; a primeira

é obtida igualando-se o fator comum a zero e a segunda é obtida dividindo-se ambos os membros da equação original pelo fator comum.

Problemas:

3.1) Resolva a equação $x(1 - x) = 2x$.

Solução: Como x é fator comum, obtemos

$x = 0$ ou $1 - x = 2$, isto é,
$x = 0$ ou $-x = 2 - 1$, isto é,
$x = 0$ ou $-x = 1$, isto é,
$x = 0$ ou $x = -1$.

Resposta: $x = 0$ ou $x = -1$

3.2) Resolva a equação $(x + 1)(1 - x) = (x + 1)(2 + x)$.

Solução: como $x + 1$ é fator comum, obtemos

$x + 1 = 0$ ou $1 - x = 2 + x$, isto é,
$x = -1$ ou $-x - x = 2 - 1$, isto é,
$x = -1$ ou $-2x = 1$. Daí,

$$x = -1 \quad \text{ou} \quad x = -\frac{1}{2}$$

Resposta: $x = -1$ ou $x = -\frac{1}{2}$

4. PRINCÍPIOS GERAIS PARA A SOLUÇÃO DE INEQUAÇÕES (DESIGUALDADES)

I) Numa inequação podemos transpor um termo desde que o multipliquemos por -1.

Em suma, $a + b < c \Leftrightarrow a < c - b$.

Com efeito, $a + b < c \Rightarrow a + b + (-b) < c + (-b) \Rightarrow a + 0 < c - b \Rightarrow a < c - b$ e, reciprocamente, $a < c - b \Rightarrow a + b < c - b + b \Rightarrow a + b < c + 0 \Rightarrow a + b < c$. (Prova análoga para desigualdades do tipo $a > b$.)

II) Uma inequação não se altera quando multiplicamos seus membros por um mesmo número positivo.

Em suma, se $k > 0$, $a < b \Leftrightarrow ka < kb$.

Com efeito, se $k > 0$, $a < b \Leftrightarrow a - b < 0 \Rightarrow k (a - b) < 0 \Rightarrow ka - kb < 0$ $ka < kb$ e, reciprocamente, $ka < kb \Rightarrow ka - kb < 0 \Rightarrow k(a - b) < < 0 \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow a < b$. (Prova análoga para desigualdades do tipo $a > b$).

III) Uma inequação não se altera quando multiplicamos seus membros por um mesmo número negativo e, simultaneamente, invertemos o sinal de desigualdade.

Em suma, se $k < 0$, $a < b \Rightarrow ka > kb$.

Com efeito, se $k < 0$, $a < b \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow k (a - b) > 0 \Rightarrow ka - kb > 0 \Rightarrow ka > kb$ e, reciprocamente, $ka > kb \Rightarrow ka - kb > 0 \Rightarrow k(a - b) > > 0 \Rightarrow a - b < 0 \Rightarrow a < b$. (Prova análoga para desigualdades do tipo $a > b$.)

Problemas:

4.1) Resolva a inequação

$2x + 3 < 4x + 7$.

Solução: Transpondo, $2x - 4x < 7 - 3$,

isto é, $-2x < 4$.

Dividindo por $-2\left(\text{isto é, multiplicando por } -\frac{1}{2}\right)$

$x > -2$.

Resposta: $x > -2$.

4.2) Resolva a inequação $5x - 3 < x + 13$.

Solução: Transpondo, $5x - x < 3 + 13$.

Isto é, $4x < 16$.

Dividindo por 4 $\left(\text{isto é, multiplicando por } \frac{1}{4}\right)$

vem $x < 4$.

Resposta: $x < 4$.

4.3) Resolva a inequação $2x - 4 \geqslant 5x + 8$.

Solução: Transpondo, $2x - 5x \geqslant 4 + 8$

Isto é, $-3x \geqslant 12$.

Dividindo por -3 $\left(\text{isto é, multiplicando por } -\frac{1}{3}\right)$

vem $x \leqslant -4$

Resposta: $x \leqslant -4$.

4.4) Resolva a inequação $|2x - 3| < 1$.

Solução: Sabemos do capítulo 1 que os números que têm módulo menor que 1 estão compreendidos entre -1 e 1.

Portanto, $-1 < 2x - 3 < 1$.

Somando 3, vem $2 < 2x < 4$.

Dividindo por 2, $1 < x < 2$.

Resposta: $1 < x < 2$.

4.5) Resolva a inequação $|1 - 3x| > 5$.

Solução: Sabemos do capítulo 1 que os números que têm módulo maior que 5 são menores que -5 ou maiores que 5.

Portanto, $1 - 3x < -5$ ou $1 - 3x > 5$.

Daí, $-3x < -5 - 1$ ou $-3x > 5 - 1$

Isto é, $-3x < -6$ ou $-3x > 4$.

Logo, $x > 2$ ou $x < -\frac{4}{3}$

5. VARIAÇÃO DE SINAL DO BINÔMIO DO PRIMEIRO GRAU

Consideremos o binômio do primeiro grau $ax + b$, a e b constantes, $a \neq 0$.

Sua raiz (isto é, a raiz da equação $ax + b = 0$) é $x_1 = -\frac{b}{a}$.

Podemos escrever

$$ax + b = a\left(x + \frac{b}{a}\right) = a\,(x - x_1).$$

Para valores de x tais que $x > x_1$, $x - x_1$ será positivo, portanto, $ax + b$ terá sinal igual ao de a. Para valores de x tais que $x < x_1$, $x - x_1$ será negativo, portanto $ax + b$ terá sinal contrário ao de a.

Para $x = x_1$, $ax + b$ será igual a zero.

Daí, o quadro

Sinal de $-a$	0	Sinal de a	Sinal de $ax + b$
————	x_1	————	Valores de x

Problemas:

5.1) Estude a variação de sinal de $y = 3x - 5$.

Solução: A raiz de $3x - 5 = 0$ é $x = \frac{5}{3}$.

Como $a = 3 > 0$, temos o quadro

$-$	0	$+$	Sinal de $3x - 5$
————	$\frac{5}{3}$	————	x

Resposta: $3x - 5 < 0$ para $x < \frac{5}{3}$

$3x - 5 = 0$ para $x = \frac{5}{3}$

$3x - 5 > 0$ para $x > \frac{5}{3}$.

5.2) Estude a variação de sinal de $y = 1 - 2x$.

Solução: A raiz de $1 - 2x = 0$ e $x = \frac{1}{2}$.

Como $a = -2 < 0$, temos o quadro

+	0	−	Sinal de $1 - 2x$
	$\frac{1}{2}$		Valores de x

Resposta: $1 - 2x > 0$ para $x < \frac{1}{2}$

$1 - 2x = 0$ para $x = \frac{1}{2}$

$1 - 2x < 0$ para $x > \frac{1}{2}$

5.3) Estude a variação de sinal de $(1 - x)(x + 2)$.

Solução: A raiz de $1 - x = 0$ e $x = 1$ e a de $x + 2 = 0$ é $x = -2$.

Daí o quadro

+	+	+	0	−	Sinal de $1 - x$
−	0	+	+	+	Sinal de $x + 2$
	-2		1		Valores de x

Que nos fornece o quadro

$-$	0	$+$	0	$-$	Sinal de $(1-x)\ (x+2)$
	-2		1		Valores de x

Resposta: $(1-x)\ (x+2)<0$ para $x<-2$ ou $x>1$

$(1-x)\ (x+2)=0$ para $x=-2$ ou $x=1.$

$(1-x)\ (x+2)>0$ para $-2<x<1.$

5.4) Resolva a inequação $(2x-3)\ (x+1)>0.$

Solução: temos o quadro

$-$		$-$	$-$	0	$+$		Sinal de $2x-3$
$-$		0	$+$	$+$	$+$		Sinal de $x+1$
	-1			$\frac{3}{2}$			Valores de x

Que nos fornece

$+$	0	$-$	0	$+$	Sinal de $(2x-3)\ (x+1)$
	-1		$\frac{3}{2}$		Valores de x

Logo, $(2x-3)\ (x+1)>0$ para e só para $x<-1$ ou $x>\frac{3}{2}$.

Resposta: $x<-1$ ou $x>\frac{3}{2}$

5.5) Resolva a inequação $\frac{(2x-3)\ (1-x)}{x+2} \geqslant 0.$

Solução: Temos o quadro

−	−	−	−	−	0	+	Sinal de $2x - 3$
+	+	+	0	−	−	−	Sinal de $1 - x$
−	0	+	+	+	+	+	Sinal de $x + 2$
	-2		1		$\frac{3}{2}$		Valores de x

Que nos fornece

+	N.E.	−	0	+	0	−	Sinal de $\frac{(2x-3)(1-x)}{x+2}$
	-2		1		$\frac{3}{2}$		Valores de x

(N.E. = não existe.)

Logo, $\frac{(2x-3)(1-x)}{x+2} \geqslant 0$ para e só para $x < -2$ ou $1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$.

Resposta: $x < -2$ ou $1 \leqslant x \leqslant \frac{3}{2}$.

5.6) Resolva a inequação $\frac{2x+3}{2x-1} \geqslant 1$.

Solução: Transpondo, vem $\frac{2x+3}{2x-1} - 1 \geqslant 0$.

Daí, $\frac{4}{2x-1} \geqslant 0$.

+	+	+	Sinal de 4
−	0	+	Sinal de $2x - 1$
	$\frac{1}{2}$		Valores de x

$-$	N.E.	$+$	Sinal de $\frac{4}{2x-1}$
	$\frac{1}{2}$		Valores de x

Logo, $\frac{4}{2x - 1} \geqslant 0$ para e só para $x > \frac{1}{2}$.

Resposta: $x > \frac{1}{2}$.

5.7) Resolva o sistema de inequações

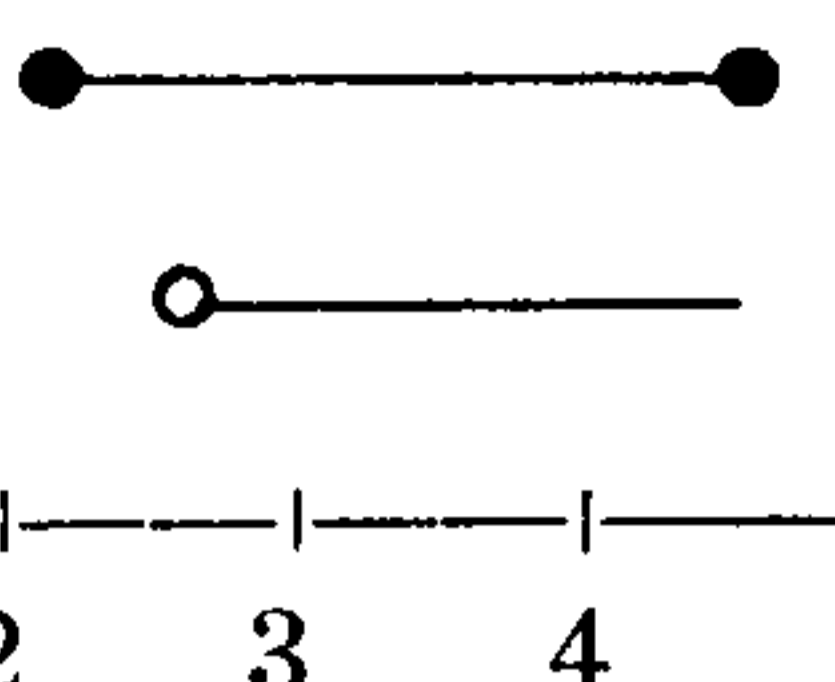
$$\begin{cases} (4 - x)(2 + x) \geqslant 0 \\ 5x + 1 > 2x + 10 \end{cases}$$

(Isto é, determine as soluções simultâneas das duas inequações).

Solução: A primeira desigualdade fornece:

$+$	$+$	$+$	0	$-$	Sinal de $4 - x$
$-$	0	$+$	$+$	$+$	Sinal de 2_1x
	-2		4		Valores de x

Daí,

$-$	0	$+$	0	$-$	
	-2		4		Valores de x.

Logo, $(4 - x)(2 + x) \geqslant 0$ para

$-2 \leqslant x \leqslant 4$, que é a solução da primeira desigualdade.

A segunda desigualdade fornece $5x - 2x > 10 - 1$, isto é, $3x > 9$, cuja solução é $x > 3$.

Portanto, ●————● solução da primeira

o———— solução da segunda

——|——|——|—— valores de x.
-2 3 4

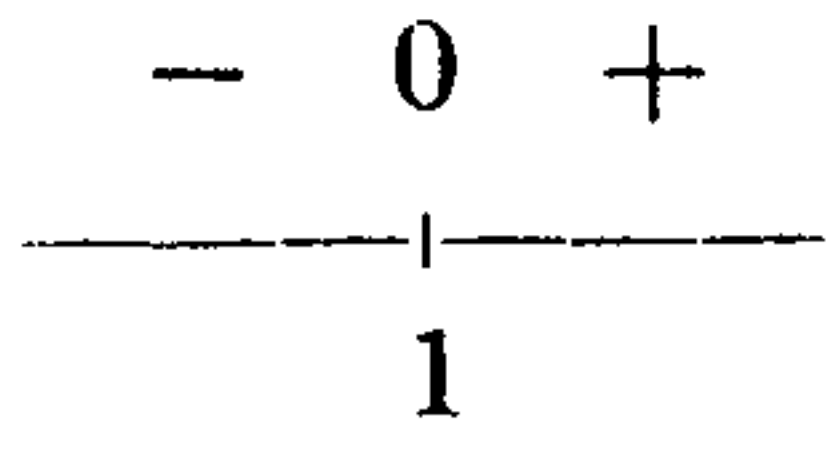
A solução comum às duas desigualdades é $3 < x \leqslant 4$.

Resposta: $3 < x \leqslant 4$.

6. MÓDULOS

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{se } a \geqslant 0 \\ -a, & \text{se } a < 0. \end{cases}$$

Assim, por exemplo, $|5| = 5$ (pois $5 > 0$)
e $|-3| = -(-3) = 3$ (pois $-3 < 0$).

É claro que:

I) $|a| \geqslant 0$ para todo real a.

II) $\sqrt{a^2} = |a|$.

Com efeito, as raízes quadradas de a^2 são a e $-$a. A raiz não negativa é a se $a \geqslant 0$, e $-a$ se $a < 0$. Mas isto é precisamente $|a|$.

Problemas:

6.1) Resolva a equação $|x-1| = 2x + 3$.

Solução: Temos

$-$ 0 +	Sinal de $x-1$
——|—— (1)	Valores de x

Para resolver a equação, tratemos separadamente os casos:

a) $x \leqslant 1$

Neste caso, $x-1$ é negativo ou nulo e como $|a| = -a$ se $a < 0$, temos $|x-1| = -x+1$

Neste caso, a equação fica

$-x + 1 = 2x + 3$

$-3x = 2$

$x = -\frac{2}{3}$

b) $x > 1$.

Neste caso $x - 1$ é positivo e como $|a| = a$ se $a > 0$, temos $|x - 1| = x - 1$.

Neste caso, a equação fica

$x - 1 = 2x + 3$

$-x = 4$

$x = -4$, que é absurdo, pois neste caso $x > 1$.

Logo, a única solução da equação é $x = -\frac{2}{3}$

Resposta: $x = -\frac{2}{3}$.

6.2) Resolva a equação $|1 + 2x| = x + 2$.

Solução: Temos

$-$	0	$+$	Sinal de $1 + 2x$
	$-\frac{1}{2}$		Valores de x

Tratemos separadamente os casos:

a) $x \leqslant -\frac{1}{2}$

Neste caso, $1 + 2x \leqslant 0$, logo, $|1 + 2x| = -(1 + 2x)$.

A equação fica

$-(1 + 2x) = x + 2$

$-1 - 2x = x + 2$

$-2x - x = 1 + 2$

$-3x = 3$

$x = -1$

b) $x > \frac{1}{2}$.

Neste caso, $1 + 2x > 0$, logo, $|1 + 2x| = 1 + 2x$.

A equação fica

$$1 + 2x = x + 2$$
$$2x - x = 2 - 1$$
$$x = 1.$$

Resposta: $x = -1$ ou $x = 1$.

6.3) Resolva a equação

$$|x + 3| - |2x + 1| = x + 1$$

Solução: Temos

−	0	+	+	+	Sinal de $x + 3$
−	−	−	0	−	Sinal de $2x + 1$
	-3		$-\frac{1}{2}$		Valores de x

Tratemos separadamente os casos:

a) $x \leqslant -3$.

Neste caso, $x + 3 \leqslant 0$ e $2x + 1 < 0$.

Logo, $|x + 3| = -(x + 3)$ $|2x + 1| =$
$= -(2x + 1)$.

A equação fica

$$-(x + 3) + (2x + 1) = x + 1$$
$$x - 2 = x + 1$$
$$x - x = 2 + 1$$
$$0 = 3$$

O que é impossível.

b) $-3 < x \leqslant -\frac{1}{2}$.

Neste caso, $x + 3 > 0$ e $|2x + 1| \leqslant 0$. Logo, $|x + 3| = x + 3$ e $2x + 1 = -(2x + 1)$.

A equação fica

$x + 3 + (2x + 1) = x + 1$
$3x + 4 = x + 1$
$3x - x = 1 - 4$
$2x = -3 - 3$
$x = -\frac{3}{2}$

c) $x > -\frac{1}{2}$.

Neste caso, $x + 3 > 0$ e $2x + 1 > 0$. Logo, $|x + 3| = x + 3$ e $|2x + 1| = 2x + 1$.

A equação fica

$x + 3 - (2x + 1) = x + 1$
$-x + 2 = x + 1$
$-x - x = 1 - 2$
$-2x = -1$
$x = \frac{1}{2}$

Resposta: $x = -\frac{3}{2}$ ou $x = \frac{1}{2}$.

7. GRANDEZAS PROPORCIONAIS

Uma variável x é dita diretamente proporcional a y quando existe uma constante $k \neq 0$, tal que $x = ky$.
Uma variável x é dita inversamente proporcional a y quando é diretamente proporcional ao inverso de y.

Exemplos:

7.1) Na fórmula $V = \frac{4}{3}\pi \mathbb{R}^3$, V é diretamente proporcional a $\mathbb{R}^3$.

7.2) Na fórmula $F = 6{,}673 . 10^{-11} \frac{m_1 . m_2}{d^2}$

F é diretamente proporcional a m_1 e m_2 e inversamente proporcional a d^2.

8. MÉDIAS

Definimos para os números $a_1, a_2, \ldots, a_n$ sua média aritmética como sendo $\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \ldots$

Definimos para os números não nulos $a_1, a_2, \ldots a_n$ sua média harmônica como sendo $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$.

Definimos para os números positivos $a_{11}, a_{21}, \ldots a_n$ sua média geométrica como sendo

$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$.

Assim, 4 e 9 têm as seguintes médias:

Aritmética: $\frac{4 + 9}{2} = 6{,}5$

Harmônica: $\frac{2}{\frac{1}{4} + \frac{1}{9}} = \frac{72}{13}$.

Geométrica: $\sqrt[n]{4 . 9} = 6$.

BÁRBARA

PROBLEMAS

A

1) (UGF-70)

Resolva a equação $5(x + 3) - 2(x - 1) = 20$

a) $x = 3$ b) impossível c) $x = 9$ d) $x = 1$

e) $x = 0$

2) (UGF-70)

Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ 3x - 2y = 4 \end{cases}$$

a) indeterminado b) $x = 2, y = 1$ c) impossível

d) $x = 3, y = 1$ e) $x = 1, y = 1$.

3) (FIB-72)

Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 6x + 9y = 15 \end{cases}$$

a) impossível b) $x = 0, y = 1$ c) $x = 1, y = 0$

d) indeterminado e) $x = 1, y = 2$

4) (UFRJ-66)

Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} y - \dfrac{x + 2}{3} = 5 \\ 2x - (1 - y) = 0 \end{cases}$$

5) (UFRJ-69)

Resolva o sistema de equações

$$\begin{cases} \frac{x + y}{8} + \frac{x - y}{6} = 5 \\ \frac{x + y}{4} - \frac{x - y}{3} = 10 \end{cases}$$

6) (COMSART-73)

O valor de z no sistema

$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - z = 2 \\ -y + z = 3 \end{cases}$$

É dado por

a) -2 b) 2 c) -1 d) 1 e) NRA

7) (UFRJ-71)

Numa sala há tamboretes de 3 pernas e cadeiras de 4 pernas. Sendo 43 o número total de pernas e 12 o número total de cadeiras e tamboretes, determine o número de cadeiras.

8) (UEG-71)

Calcule o valor de y no sistema

$$x + 2y + 4z = \frac{5}{2}$$

$$x + y + z = \frac{1}{2}$$

$$x + 3y + 9z = \frac{13}{2}$$

9) (FIB-72)

Numa livraria há m livros de psicologia e n de biologia. Cada livro de psicologia custa x cruzeiros e cada livro de biologia custa y cruzeiros. A terça parte do preço total dos livros é

a) $\frac{x + ny}{3}$ b) $\frac{mx + y}{3}$ c) $\frac{x + y}{3}$

d) $\frac{m + n}{3}$ e) $\frac{mx + ny}{3}$

10) (FIB-72)

A solução de $\frac{5}{x} - \frac{1}{12x} + \frac{1}{2} = \frac{5 - 3x}{3x} + \frac{1}{4x}$ é:

a) $x = 0$ b) $x = -2$ c) $x = -1$ d) $x =$ e) $x = 2$

11) (ITA-50)

Resolva a equação

$(x - 1)\, x^2 = x\,(x + 1) - 2x$

12) (UFRJ-69)

Supondo $ab \neq 0$, resolva a equação

$$\frac{ax + a}{b} - \frac{x - b}{a} = \frac{3ax + (a - b)^2}{ab}.$$

13) Resolva a equação

$$\frac{3x - 1}{2x - 1} + \frac{3x + 2}{2x + 1} = 3 - \frac{1}{4x^2 - 1}$$

14) (ENCE-70-2c)

Supondo $b \neq \pm 2a$, resolva a equação

$$\frac{2x + 7b}{2a + b} - 1 = \frac{x + a}{2a - b}$$

15) (CM-73)

Supondo $a^2 - b^2 \neq 0$, o valor de z na equação

$$\frac{5a}{a-b} - \frac{5a}{a+b} = \frac{2bz}{a^2 - b^2} \quad \text{é}$$

a) $5a$ b) $3(a + b)$ c) $10a^2$ d) $\frac{a}{a+b}$ e) NRA

16) (ITA-69)

Consideremos a função $f(x) = x^3 - 1 + (1 - x)$
$(x^2 + x + 1)$.

O conjunto de todas as soluções da equação $f(x) = 0$ é

a) $\{-1, 0, 1\}$ b) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } -2 < x < 1\}$

c) $\{x \mid x \in \mathbb{R} \text{ e } x > 0\}$ d) $\varnothing$ e) $\mathbb{R}$

17) (ITA-68)

O valor absoluto do número y é menor ou igual que todas as soluções positivas da equação $(1 - x) +$
$+ x(1 - x) = 1 - x^2$.

Então

a) $y = -\frac{1}{2}$ b) $y = -1$ c) $-3 < y < 3$ d) $y = \frac{1}{2}$

e) NRA

18) (UGF-70)

A solução de $6 - 2x < 0$ é

a) $x < 0$ b) $x < -3$ c) $x > 0$ d) $x > 2$ e) $x > 3$

19) (FIB-72)

A solução de $5x - 8 > 3x + 16$ é

a) $x > 12$ b) $x < 12$. c) $x = 12$ d) x qualquer

e) NRA

20) (CESCEA-72)

A solução de $|3x - 4| \geqslant 2$ é

a) $x \leqslant \frac{2}{3}$ ou $x \geqslant 2$ b) $x \geqslant 2$ c) $\frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2$

d) $-\frac{13}{2} \leqslant x \leqslant \frac{7}{2}$

21) (ENCE-67-2c)

Resolva a inequação $|1 - 3x| < 5$

22) (UFRJ-65)

Resolva a inequação $\left|1 - \frac{4x}{5}\right| > 3$

23) (ENCE-71)

Resolva o sistema de inequações

$$\begin{cases} \frac{1}{x} \leqslant 2 \\ |x| < 1 \end{cases}$$

24) (CICE-69-2c)

A solução de $\frac{x+2}{x-1} \leqslant 2$, $x \neq 1$ é:

a) $x \geqslant 4$ b) $x \leqslant 4$ c) nenhuma das outras respostas

d) $x > 4$ e) $x \geqslant 4$ ou $x \leqslant 1$

25) (PUC-57)

Resolva a inequação $\frac{x-2}{x+4} > 0$

26) (ITA-51)

Resolva a inequação $(x - 2)(x + 3) < 0$

27) (CESCEA-72)

Assinale a afirmação correta:

a) $|-x| = x$ para todo real x

b) Quaisquer que sejam x e y, $x^2 = y^2 \Leftrightarrow x = y$

c) $\sqrt{x^2} = x$ para todo real x

d) $-|x| \leqslant x \leqslant |x|$ para todo real x

28) (CESCEA-72)

Assinale a afirmação falsa

a) Para todo $a > 0$, $|x| < a \Leftrightarrow -a < x < a$

b) $|x + y| \leqslant |x| + |y|$, quaisquer que sejam os reais x e y

c) $|-x| = x$, qualquer que seja o real x

d) $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$, qualquer que seja $y \neq 0$.

29) (SEG-67)

Sendo $\frac{p}{q}$ uma fração irredutível, que número se deve subtrair de seus termos para se obter o inverso dessa fração?

30) (EN-70)

A média aritmética de 50 números é 38. Se dois dos números, 45 e 55, são suprimidos, a média aritmética passa a ser:

a) 35,5 b) 37 c) 37,2 d) 37,5 e) 37,52

31) (CM-73)

Se uma pessoa vendeu um gravador por Cr$ 885,00 a fim de lucrar 18, é porque comprou o gravador por

a) Cr$ 805,00 b) Cr$ 780,00 c) Cr$ 815,00

d) Cr$ 750, e) NRA

32) (COMSART-73)

Uma pessoa, ao multiplicar um número por 60, se esqueceu de colocar o zero à direita e obteve um resultado inferior em 291.006 unidades ao que deveria ter encontrado. O número é

a) 32.334 b) 2.900 c) 58.201 d) 5.389 e) NRA

33) (UFF-71)

Resolva a inequação $|x - a| \leqslant b$

34) (CM-72)

Uma pessoa entrou numa sociedade comercial com um capital de Cr$ 8.265,00 e saiu com Cr$ 8.700,00. Seu lucro foi de

a) 3% b) 4% c) 9,5% d) 5% e) NRA

35) (CM-73)

Se 45 operários fazem uma obra em 16 dias, trabalhando 7 horas por dia, o número de operários necessário para fazer a mesma obra em 18 dias, trabalhando 10 horas por dia, é

a) 48 b) 37 c) 40 d) 36 e) NRA

36) (CICE-69-2c)

30 operários trabalhando 8 horas por dia, constroem 36 casas em 6 meses. Em quanto tempo 20 operários, trabalhando 10 horas por dia, constroem 25 casas?

a) 5 meses b) 4 meses c) 12 meses

d) 3 meses e) NRA

37) (CICE-71)

São dadas três variáveis, R, S e T. R é diretamente proporcional a S e inversamente proporcional a T.

Quando S = 2 e T = 4, o valor de R é 1. Calcule R quando S = 10 e T = 2.

a) 5 b) 10 c) 4 d) 2 e) NRA

38) A solução de $2 < |x - 1| < 5$ é

a) $-4 < x < -1$ ou $3 < x < 6$
b) $3 < x < 6$ ou $-6 < x < -3$
c) $x < -1$ ou $x > 3$
d) $-1 < x < 3$
e) $-4 < x < 6$

39) Contando n bolas coloridas, algumas pretas e outras vermelhas, achou-se que 49 das 50 primeiras eram vermelhas. Depois, 7 de cada 8 contadas eram vermelhas. Se, no total, 90°/° ou mais das bolas contadas eram vermelhas, o máximo valor de n é

a) 225 b) 210 c) 200 d) 180 e) 175

40) (CICE-71)

Se $2x - 3y - z = 0$ e $x + 3y - 14z = 0$, $z \neq 0$, o valor de $\dfrac{x^2 + 3xy}{y^2 + z^2}$ é

a) -1 b) 1 c) 19 d) 7 e) -19

41) Um comerciante compra um artigo, de preço Cr\$ 24,00, com um desconto de 12,5%. Ele deseja vender o artigo com um lucro de $33\frac{1}{3}\%$, mesmo concedendo um desconto de 30 % ao comprador. Com que preço deve ser marcado o artigo?

a) Cr\$ 25,20 b) Cr\$ 30,00 c) Cr\$ 33,60
d) Cr\$ 40,00 e) NRA

42) Descontos sucessivos de 10% e 20% são equivalentes a um único desconto de

a) 30% b) 15% c) 72% d) 28% e) NRA

43) Se h homens fazem um trabalho em d dias, então, h + r homens podem fazer o mesmo trabalho em

a) d + r dias b) d − r dias c) $\frac{hd}{h+r}$ dias

d) $\frac{h}{h+r}$ dias e) NRA

44) (PUCSP-73)

Assinale a desigualdade falsa.

a) $|x + y| \geqslant |x| + |y|$
b) $|x - y| \geqslant |x| - |y|$
c) $|x - y| = |y - x|$
d) $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$
e) $|x - y| \leqslant |x| + |y|$

45) (CESCEA-70)

O conjunto de todos os x para os quais $\sqrt{\frac{x+1}{x-2}}$ é um número real é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leqslant x \leqslant 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < -1 \text{ ou } x > 2\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -1 \text{ ou } x > 2\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$

46) (CESCEA-68)

Seja $y = \frac{\sqrt{-x}}{x-2}$. Determine o conjunto a dos números reais x para os quais y é real.

a) $A = \emptyset$ b) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 2\}$ c) $A = \{0\}$
d) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant 0\}$ e) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x < 2\}$

47) (CESCEM-67) A equação $|x - 5| = 3$ tem

a) uma única solução
b) duas soluções positivas
c) duas soluções negativas
d) uma solução positiva e outra negativa
e) zero soluções reais

48) (PUCSP-70)

Assinale a implicação verdadeira:

a) $a + b > b + c \Rightarrow a > 0$ e $b > 0$
b) $a + b > b + c \Rightarrow a \leqslant c$
c) $a + b > b + c \Rightarrow a > c$
d) $a + b > b + c \Rightarrow a > c$
e) NRA

49) (PUCSP-70)

Sendo a e b reais quaisquer e m um número real diferente de zero, então:

a) $a > b$ e $am > bm \Rightarrow m = 1$
b) $a \geqslant b$ e $am \leqslant bm \Rightarrow m < 0$
c) $a \geqslant b$ e $am \geqslant bm \Rightarrow m \geqslant 1$
d) $a < b$ e $am < bm \Rightarrow m < 0$
e) NRA

50) (FEI-68)

A desigualdade $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} > 2$ se verifica

a) quaisquer que sejam os reais x e y
b) para $x \neq 0$

c) para quaisquer x e y de mesmo sinal
d) para quaisquer x e y de sinais contrários
e) NRA

51) (UM-69)

A desigualdade $\frac{1}{x+1} \geqslant 0$ é satisfeita se

a) $x > 0$ b) $x > -1$ c) $x < 0$ d) $x \geqslant -1$ e) NRA

52) (CESCEA-68) Se $|x - 3| < 1$, então,

a) $x = 0$ b) $1 < x < 2$ c) $x < 0$ d) $2 < x < 4$
e) $0 < x < 2$

53) (CESCEA-70)

O conjunto de todos os x para os quais $|2x - 3| > x$ é
a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 0 \text{ ou } x > 4\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} \mid 1 < x < 3\}$ d) $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < 1 \text{ ou } x > 3\}$

54) Se x homens, trabalhando x horas por dia durante x dias, produzem x artigos, então, o número de artigos produzidos por y homens, trabalhando y horas por dia durante y dias é

a) $\frac{x^3}{y^2}$ b) $\frac{y^3}{x^2}$ c) $\frac{x^2}{y^3}$ d) $\frac{y^2}{x^3}$ e) y

55) (UCMG-65)

Resolva a inequação $\frac{x}{2x+1} < 1$.

56) (UFMG-66)

Resolva a inequação $\frac{2x+1}{3x-1} < 1$.

57) (UFMG-66)

Antônio, João e Pedro trabalham na mesma firma comercial, há 4, 6 e 10 anos, respectivamente. Como gratificação, a firma distribuiu entre eles, proporcionalmente ao tempo de serviço, a quantia de Cr$ 400.000,00. Quanto recebeu cada um?

58) (UFRJ-64)

Resolva o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{4x - 5}{7} < x + 3 \\ \\ \dfrac{3x + 8}{4} > 2x - 5 \end{cases}$$

59) (EESC-64)

Resolva a equação $21x\ (2x - 3)\ (3x + 7) = 0$

60) (UFMG-65)

Os inversos de três números são respectivamente proporcionais a 3, 7 e 11. Determine esses números, sabendo que sua soma é 3.930.

61) As raízes de $\dfrac{1}{x - 1} = \dfrac{2}{x - 2}$ são:

a) 1 e 2 b) 1 c) 2 d) 0 e) NRA

62) Se na fórmula $z = xy^2$, x e y decrescem de 25%, z

a) decresce 50%

b) decresce 75%

c) decresce $\dfrac{37}{64}$ do seu valor

d) decresce $\dfrac{27}{64}$ do seu valor

e) NRA

PROBLEMAS B

1) (CICE-70-2c)

A equação $|x + 1| - |x| = x + 2$

a) possui duas soluções reais cuja soma é 2
b) possui somente uma solução real
c) possui três soluções reais cuja soma é -3
d) possui uma infinidade de soluções reais distintas
e) não possui solução real

2) (CICE-71)

A equação $|x - 1| = |x| + 1$

a) não tem solução
b) tem uma única solução
c) tem somente duas soluções
d) tem uma infinidade de soluções
e) NRA

3) (UFRJ-64)

Resolva a inequação $\left| \dfrac{x}{x + 1} - \dfrac{1}{2} \right| < \dfrac{1}{10}$

4) (ENCE-71)

Resolva a inequação $|x - 1| < |x - 3|$.

5) Resolva a equação $|x + 1| + |x - 4| = 5$.

6) (COMCITEC-73)

O conjunto solução da desigualdade
$|x + 1| - |x| \leqslant x + 2$ é

a) $[-3, 0] \cup [1,73]$
b) $\{x \mid x \leqslant 0\} \cup [3,15]$

c) $[-3,0] \cup \{x \mid x \geqslant 0\}$
d) $\{x \mid -5 < x < -1\} \cup \{x \mid 1 < x < 17\}$
e) $[-4, 2] \cup [-2, 1]$

7) (IME-71)

A solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{1 - x + 2y} - \dfrac{1}{x + 2y - 1} = 0 \\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{1 - x + 2y} - \dfrac{1}{1 - x - 2y}} = 2 \end{cases}$$

a) $x = 1, \quad y = 2$ b) $x = -1, \quad y = 1$
c) $x = 2, \quad y = 2$ d) $x = 2, \quad y = 1$
e) $x = 0, \quad y = 1$ f) NRA

8) (UFRJ-62-2c)

Uma certa função de x é igual a x^2 para $x \geqslant 0$ e igual a $-x^2$ para $x < 0$. Dê uma expressão única definindo esta mesma função para todo e qualquer valor real de x

9) (SEG-67)

Quantos por cento sobre o preço de venda representa o lucro de 25% sobre o preço de custo?

10) (CM-73)

A solução do sistema

$$\begin{cases} \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = 1 \\ \dfrac{12}{y} - \dfrac{3}{x} = 5 \end{cases}$$

é:

a) $x = \dfrac{2}{3}, \quad y = \dfrac{1}{5}$ b) $x = 1, \quad y = \dfrac{2}{5}$

c) $x = 3, y = 1$ d) $x = 1, \quad y = \frac{4}{3}$ e) NRA

11) A dá a B tantos cruzeiros quantos B possui e A dá a C tantos cruzeiros quantos C possui. Depois, B dá a A e C tantos cruzeiros quantos cada um possui e C, finalmente, faz a mesma coisa. Se, no final, terminam todos com 16 cruzeiros, com quantos cruzeiros A começou?

a) 24 b) 26 c) 28 d) 30 e) 32

12) Quantas soluções inteiras e positivas possui a equação $2x + 3y = 763$?

a) 255 b) 254 c) 128 d) 127 e) 0

13) Um relógio atrasa 2min30s por dia real. Ele estava certo no dia 15 de março, 13h. Seja n a correção, em minutos, que deve ser somada à hora indicada pelo relógio. Quando o relógio marca 9 horas do dia 21 de março, n é igual a

a) $14 \frac{14}{23}$ b) $14 \frac{1}{14}$ c) $13 \frac{101}{115}$ d) $13 \frac{83}{115}$

e) $13 \frac{13}{23}$

14) Para todos os valores reais de t, $\sqrt{t^4 + t^2} =$

a) t^3 b) $t^2 + t$ c) $|t^2 + t|$ d) $t\sqrt{t^2 + 1}$
e) $|t|\sqrt{1 + t^2}$

15) (EEFS-71)

Nesta questão há uma sentença com duas asserções:

"O conjunto dos pares (x, y) que satisfazem a equação

$(a_1x + b_1y + c) \quad (a_2x + b_2y + c_2) = 0$

É o mesmo conjunto solução do sistema linear

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

Porque

Se um produto de dois fatores P e Q é zero, então, temos $P = 0$ ou $Q = 0$.

a) As duas asserções são verdadeiras e a segunda asserção é uma justificativa correta da primeira.

b) As duas asserções são verdadeiras mas a segunda asserção não é uma justificativa correta da primeira.

c) A primeira asserção é verdadeira e a segunda é falsa.

d) A primeira asserção é falsa e a segunda é verdadeira

e) As duas asserções são falsas.

PROBLEMAS C

1) (ITA-66)

Dois barcos partem num mesmo instante de lados opostos de um rio de margens paralelas. Viajam cada qual, perpendicularmente às margens, com velocidade constante. Supondo que um deles é mais rápido que o outro, eles se cruzam num ponto situado a 720m da margem mais próxima; completada a travessia, cada barco fica parado no respectivo cais por 10 minutos. Na volta eles se cruzam a 400m da outra margem. Qual é a largura do rio?

2) Determine três naturais distintos cuja soma dos inversos seja inteira.

3) Se o sistema

$$\begin{cases} \dfrac{xy}{x+y} = a \\[2ex] \dfrac{xz}{x+z} = b \qquad\qquad (a, b, c \neq 0) \\[2ex] \dfrac{yz}{y+z} = c \end{cases}$$

tiver solução, o valor de x será:

a) $\dfrac{abc}{ab + bc + ca}$ b) $\dfrac{2abc}{ab + bc + ca}$ c) $\dfrac{2abc}{ab + ac - bc}$

d) $\dfrac{2abc}{ab + bc - ac}$ e) $\dfrac{2abc}{ac + bc - ab}$

4) (EN-71) (EPUSP-66)

Um estudante em férias, durante d dias, observou que:

I) Choveu 7 vezes, de manhã ou de tarde.

II) Sempre que chovia de tarde, fazia bom tempo de manhã.

III) Houve 5 tardes de sol.

IV) Houve 6 manhãs de sol.

d é igual a:

a) 7

b) 9

c) 10

d) 11

e) 12

5) (EESC-59-2c)

A função $f(x) = \sqrt{1 + 2x + x^2} - \sqrt{1 - 2x + x^2}$ só pode ser igual a -2, $2x$ ou 2. Dê explicação.

RESPOSTAS

A

1) D 2) B 3) D 4) $x = -2, y = 5$

5) $x = 20, y = 20$ 6) D 7) 7 8) -1

9) E 10) B 11) $x = 0$ ou $x = 1$

12) $x = \dfrac{2ab}{3a + b - a^2}$ se $3a + b - a^2 \neq 0$

impossível, se $3a + b - a^2 = 0$

13) Impossível 14) $x = 3a - 2b$, se $2a \neq 3b$

x qualquer, se $2a = 3b$.

15) A 16) E 17) C 18) E 19) A

20) A 21) $-\dfrac{4}{3} < x < 2$ 22) $x < -\dfrac{5}{2}$ ou $x > 5$

23) $-1 < x < 0$ ou $\dfrac{1}{2} \leqslant x < 1$ 24) C

25) $x < -4$ ou $x > 2$ 26) $-3 < x < 2$ 27) D

28) C 29) $p + q$ 30) D 31) D 32) D

33) $a - b \leqslant x \leqslant a + b$ 34) E 35) E 36) A

37) B 38) A 39) B 40) D 41) D

42) D 43) C 44) A 45) D 46) D

47) B 48) C 49) E 50) E 51) B

52) D 53) E 54) B 55) $x < -1$ ou $x > -\frac{1}{2}$

56) $x < \frac{1}{3}$ ou $x > 2$ 57) Cr$ 80.000,00; Cr$ 120.000,00 e Cr$ 200.000,00, respectivamente

58) $-\frac{26}{3} < x < \frac{28}{5}$ 59) $x_1 = 0, x_2 = \frac{3}{2}, x_3 = -\frac{7}{3}$

60) 2.310, 990 e 630. 61) D 62) C

B

1) B 2) D 3) $\frac{2}{3} < x < \frac{3}{2}$ 4) $x < 2$

5) $-1 \leqslant x \leqslant 4$ 6) C 7) A 8) $x|x|$

9) 20% 10) E 11) B 12) D 13) A

14) E 15) D.

C

1) 1760m 2) 2, 3, 6 3) E 4) B.

CAPÍTULO 7

EQUAÇÃO DO SEGUNDO GRAU

1. FÓRMULA DE RESOLUÇÃO.

Uma equação do segundo grau é uma equação da forma
$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0$

Para resolvê-la, dividimos ambos os membros por a, obtendo

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{c}{a} = 0, \text{ ou seja,}$$

$$x^2 + \frac{b}{a} x = -\frac{c}{a}.$$

Somando $\frac{b^2}{4a^2}$ aos dois membros, resulta

$$x^2 + \frac{b}{a} x + \frac{b^2}{4a^2} = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a},$$

ou seja,

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \qquad (1)$$

O número $\Delta = b^2 - 4ac$ é chamado de discriminante da equação.

I) Se $\Delta = b^2 - 4ac > 0$, de ① resulta

$$x + \frac{b}{2a} = \frac{\pm\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Daí,

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}} \quad \text{ou} \quad \boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}$$

A equação, neste caso, tem duas raízes reais distintas

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

II) Se $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, de ① resulta $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0$

Daí, $\boxed{x = -\frac{b}{2a}}$

Neste caso as duas raízes coincidem,

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a}$$

Diz-se, então, que a equação possui uma raiz dupla.

III) Se $\Delta = b^2 - 4ac < 0$, a equação não tem raízes reais, pois em ① o primeiro membro é sempre positivo ou nulo e o segundo membro é negativo.

Problemas:

1.1) Determine as raízes de $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Solução: $\Delta = b^2 - 4ac = (-5)^2 - 4 \cdot (1) \cdot (6) = 1$

A equação tem duas raízes reais distintas,

$$x_1 = \frac{5 + \sqrt{1}}{2} = 3 \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{5 - \sqrt{1}}{2} = 2.$$

Resposta: $x_1 = 3$ e $x_2 = 2$

1.2) Determine as raízes de $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Solução: $\Delta = (-6)^2 - 4 . (1) . (9) = 0$

A equação tem uma raiz dupla.

$$x_1 = x_2 = \frac{6}{2} = 3$$

Resposta: $x_1 = x_2 = 3$

1.3) Resolva a equação $2x^2 + x + 8 = 0$.

Solução: Ora, $\Delta = 1^2 - 4 . (2) . (8) = -63$. Como $\Delta < 0$, a equação não tem raízes reais.

Resposta: Impossível.

2. UMA OBSERVAÇÃO IMPORTANTE

Se os coeficientes a e c da equação $ax^2 + bx + c = 0$ tiverem sinais contrários, a equação possuirá duas raízes distintas.

Com efeito, teremos $ac < 0$.

Daí, $-4\,ac > 0$. Como $b^2 \geqslant 0$, resulta $\Delta = b^2 - 4ac > 0$.

3. UMA SIMPLIFICAÇÃO NA FÓRMULA DE RESOLUÇÃO

Se na equação $ax^2 + bx + c = 0$ os coeficientes forem inteiros e b for um número par, podemos simplificar a fórmula de resolução

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Com efeito, chamando de k a metade de b, temos $b = 2k$ e

$$x = \frac{-2k \pm \sqrt{4k^2 - 4ac}}{2a} \quad \text{isto é,}$$

$$x = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 - ac}}{a}$$

O número $\Delta' = k^2 - ac$ é chamado de discriminante reduzido.

É claro que a equação possui duas raízes reais distintas, uma raiz dupla ou nenhuma raiz real conforme seja Δ' positivo, nulo ou negativo, respectivamente.

Problema:

3.1) Resolva a equação $3x^2 + 2x - 5 = 0$

Solução: Pela fórmula simplificada, temos

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 3(-5)}}{3} = \frac{-1 \pm 4}{3}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 4}{3} = 1, \quad x_2 = \frac{-1 - 4}{3} = -\frac{5}{3}$$

Resposta: $x_1 = 1$ e $x_2 = -\frac{5}{3}$

4. EQUAÇÕES TRINÔMIAS

Uma equação trinômia é uma equação da forma $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, $a \neq 0$. Para resolvê-la, basta pôr $y = x^n$ e recai-se numa equação do segundo grau $ay^2 + by + c = 0$.

Quando $n = 2$, a equação diz-se biquadrada.

Problemas:

4.1) Resolva a equação $x^4 + 10x^2 - 56 = 0$.

Solução: Pondo $y = x^2$, vem $y^2 + 10y - 56 = 0$

$$y = \frac{-5 \pm \sqrt{(-5)^2 - 1 \cdot (-56)}}{1} = -5 \pm 9$$

$y_1 = -5 + 9 = 4$ e $y_2 = -5 - 9 = -14$

Como $y = x^2$, resulta

$x^2 = 4$ ou $x^2 = -14$ (absurdo)

Logo, $x^2 = 4$ e

$x = \pm 2.$

Resposta: $x_1 = 2$ e $x_2 = -2$

4.2) Resolva a equação $x^6 - 7x^3 - 8 = 0$

Solução: Pondo $y = x^3$, vem $y^2 - 7y - 8 = 0$

$$y = \frac{7 \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \cdot (1)(-8)}}{2} = \frac{7 \pm 9}{2}$$

$$y_1 = \frac{7+9}{2} = 8, \qquad y_2 = \frac{7-9}{2} = -1.$$

Como $y = x^3$, resulta

$x^3 = 8$ ou $x^3 = -1.$

Logo, $x = 2$ ou $x = -1.$

Resposta: $x_1 = 2$, $x_2 = -1.$

5. EQUAÇÕES IRRACIONAIS

Uma equação é dita irracional quando contém incógnita submetida a radicais ou com expoentes fracionários. Assim, por exemplo, as equações

$x + \sqrt{x^2 - 2} = 2$ e $x^{1/3} + x - 5 = 0$

são irracionais.

Vejamos como resolver uma equação irracional.

Consideremos a equação

$\sqrt{P(x)} = Q(x)$ ①

onde P e Q são funções da variável real x.

Elevando ao quadrado ambos os membros, obtemos a equação

$P(x) = [Q(x)]^2$ ②

Evidentemente, toda solução de ① é também solução de ②. Lamentavelmente, nem toda solução de ② é também solução de ①. Com efeito, se $p(x) = [Q(x)]^2$, tanto podemos ter $P(x) = Q(x)$ como $\sqrt{P(x)} = - Q(x)$. Logo, ao resolvermos ② encontraremos as raízes de ① e outros valores [as raízes de $\sqrt{P(x)} = - Q(x)$] que não são, em geral, raízes de ①, valores estes que são chamados de raízes estranhas de ①.

Surge naturalmente a pergunta:

"Como reconhecer quais das raízes de ② que são também raízes de ①?"

O leitor tem duas alternativas:

I) Substituir as raízes de ② em ①. Tal alternativa é freqüentemente impraticável.

II) Observar que as raízes de ① tornam $Q(x) \geqslant 0$ ao passo que as raízes de ② que não sejam raízes de ① tornam $Q(x) < 0$. É claro que todo o exposto se aplica, "mutatis mutandis", a qualquer equação da forma $\sqrt[n]{P(x)} = Q(x)$ com n par. Com n ímpar, não há o problema das raízes estranhas, pois $\sqrt[n]{P(x)} = Q(x)$ se e só se $P(x) = [Q(x)]^p$, no caso de n ser ímpar.

Problemas:

5.1) Resolva a equação $\sqrt{x - 1} = x - 3$.

Solução: Elevando ao quadrado, obtemos

$x - 1 = (x - 3)^2$

$x - 1 = x^2 - 6x + 9$

$x^2 - 7x + 10 = 0$, que fornece as raízes $x_1 = 2$ $x_2 = 5$.

Para verificar se alguma destas raízes é estranha, basta substituir na equação. Substituindo x_1, obtemos $\sqrt{2 - 1} = 2 - 3$, ou seja, $1 = -1$. Logo, x_1 é estranha; substituindo x_2, obtemos $\sqrt{5 - 1} = 5 - 3$, ou seja, $2 = 2$. Logo, x_2 não é estranha.

Se não quiséssemos substituir x_1 e x_2 na equação, bastava, de acordo com II, verificar se $Q(x) = x - 3 \geqslant 0$.

Como $Q(x_1) = 2 - 3 = -1$ e $Q(x_2) = 5 - 3 = 2$, vemos que x_1 é estranha e x_1 não é estranha.

Resposta: $x = 5$.

5.2) Resolva a equação $7 - \sqrt{x - 5} = x$

Solução: Colocando-a na forma

$\sqrt{P(x)} = Q(x)$, obtemos

$\sqrt{x - 5} = 7 - x$.

Quadrando, resulta

$x - 5 = 49 - 14x + x^2$, isto é,

$x^2 - 15x + 54 = 0$, que fornece as raízes $x_1 = 6$ e $x_2 = 9$.

Como $Q(x_1) = 7 - 6 = 1$ e $Q(x_2) = 7 - 9 = -2$, apenas x_1 não é estranha.

Resposta: $x = 6$.

5.3) Resolva a equação $\sqrt{x + 3} - \sqrt{2x - 1} = 1$

Solução: Colocando-a na forma

$\sqrt{P(x)} = Q(x)$, obtemos

$\sqrt{x + 3} = 1 + \sqrt{2x - 1}$.

Quadrando, resulta

$x + 3 = 1 + 2\sqrt{2x - 1} + 2x - 1$

Colocando esta equação na forma $\sqrt{P(x)} = Q(x)$,

obtemos $\sqrt{2x - 1} = \dfrac{3 - x}{2}$

Quadrando, obtemos

$2x - 1 = \dfrac{9 - 6x + x^2}{4}$

$x^2 - 14x + 13 = 0$, que fornece as raízes $x_1 = 1$ $x_2 = 13$.

Devemos ter $1 + \sqrt{2x - 1} \geqslant 0$ e $\dfrac{3 - x}{2} \geqslant 0$

Apenas x_1 verifica estas condições.

Resposta: $x = 1$.

5.4) Resolva a equação $\sqrt[3]{8 + x} = 2 - x$.

Solução: Elevando ao cubo, vem $8 + x = 8 - 12x + 6x^2 - x^3$

Daí, $x^3 - 6x^2 + 13x = 0$

$x(x^2 - 6x + 13) = 0$

$x = 0$ ou $x^2 - 6x + 13 = 0$

Como $x^2 - 6x + 13 = 0$ não possui raízes reais, a única raiz real é $x = 0$.

Observe o leitor que não há necessidade de verificar se $x = 0$ é raiz estranha, pois fizemos apenas uma elevação a um expoente *ímpar* de ambos os membros da equação.

Resposta: $x = 0$.

6. RELAÇÕES ENTRE COEFICIENTES E RAÍZES

As raízes de $ax^2 + bx + c = 0\ (a \neq 0)$ são

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{e} \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

onde $\Delta = b^2 - 4ac$

Somando e multiplicando as raízes, obtemos

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= -\frac{2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} =$$

$$= \frac{(-b)^2 (\sqrt{\Delta})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} =$$

$$= \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Chamando de S e P a soma e o produto das raízes, respectivamente, temos

$$\boxed{S = -\frac{b}{a}} \qquad \boxed{P = \frac{c}{a}}$$

Problemas:

6.1) Calcular a soma e o produto das raízes de $x^2 - 7x + 12 = 0$

Solução: $S = -\frac{b}{a} = \frac{7}{1} = 7$

$$P = \frac{c}{a} = \frac{12}{1} = 12$$

(Observe o leitor que as relações entre coeficientes e raízes permitem resolver "de cabeça" a equação. Neste exemplo, a soma das raízes é 7 e o produto é 12. É claro que as raízes são 3 e 4.)

Resposta: $S = 7$ e $P = 12$.

6.2) Calcule a soma dos inversos das raízes da equação $x^2 + 4x + 1 = 0$, sem resolvê-la.

Solução $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{x_2 + x_1}{x_1 \quad x_2} = \dfrac{S}{P} =$

$$= \frac{-b/a}{c/a} = \frac{-b}{c} = \frac{-4}{1} = -4$$

Resposta: -4.

6.3) Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 + 5x + 2 = 0$, sem resolvê-la.

Solução: $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 =$

$$= S^2 - 2P = \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 2\,\frac{c}{a} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{2c}{a} =$$

$$= \frac{b^2 - 2ac}{a^2} = \frac{25-4}{1} = 21$$

Resposta: 21.

6.4) Determine m para que uma das raízes da equação $x^2 + 2mx + m + 5 = 0$ seja o dobro da outra.

Solução: Das relações entre coeficientes e raízes resulta

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -2m \\ x_1 \cdot x_2 = m + 5 \\ x_1 = 2x_2 \end{cases}$$

Daí,

$$\begin{cases} 2x_2 + x_2 = -2m \\ 2x_2 \cdot x_2 = m + 5 \end{cases}$$

Isto é,
$$\begin{cases} x_2 = \dfrac{-2m}{3} \\ x_2^2 = \dfrac{m+5}{2} \end{cases}$$

Logo, $\left(-\dfrac{2m}{3}\right)^2 = \dfrac{m+5}{2}$

$$\frac{4\,m^2}{9} = \frac{m+5}{2}$$

$8m^2 = 9m + 45$

$8m^2 - 9m - 45 = 0$

$m_1 = 3 \qquad m_2 = -\dfrac{15}{8}$

Resposta: $m = 3$ ou $m = -\dfrac{15}{8}$

6.5) Determine m para que a equação $x^2 + 2x + m = 0$ possua duas raízes de mesmo sinal.

Solução: Devemos ter

I) $\Delta \geqslant 0$ (para que haja raízes).

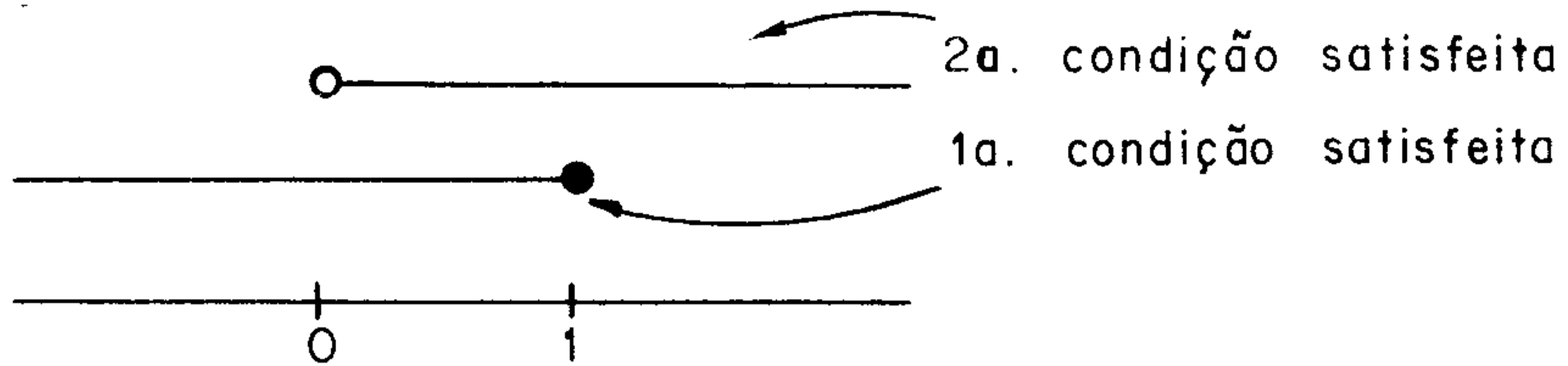
II) $p > 0$ (para que as raízes tenham o mesmo sinal).

Daí vem:

I) $1 - m \geqslant 0$

$\boxed{m \leqslant 1}$

II) $\boxed{m > 0}$

Confrontando estas condições:

Logo, as duas condições são satisfeitas para e só para $0 < m \leqslant 1$.

Resposta: $0 < m \leqslant 1$.

6.6) Determine m para que a equação $mx^2 + 2(m-3)x + (m+1) = 0$ possua duas raízes positivas distintas.

Solução: Devemos ter:

I) $a \neq 0$ (para que a equação seja do segundo grau).

II) $\Delta > 0$ (para que a equação tenha raízes reais distintas).

III) $P > 0$ (para que as raízes tenham o mesmo sinal).

IV) $S > 0$ (para que este sinal seja +).

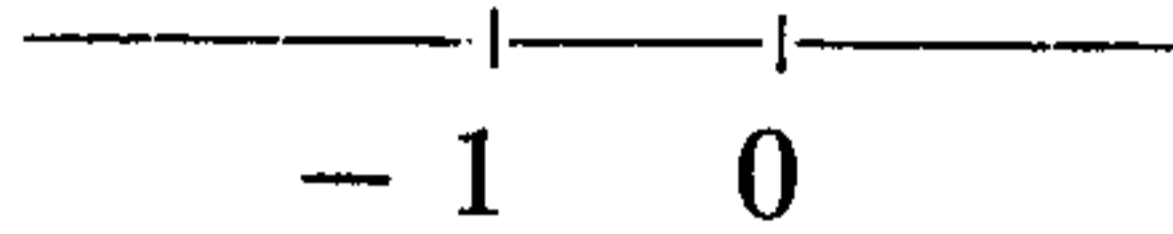
Daí vem

I) $\boxed{m \neq 0}$

II) $(m-3)^2 - m(m+1) > 0$

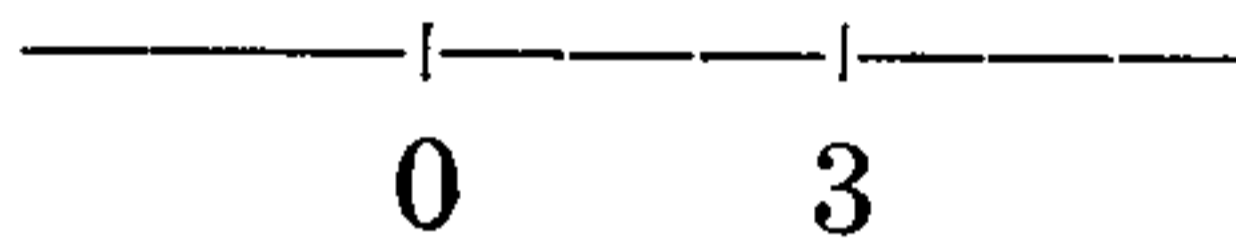
$-7m + 9 > 0$

$$\boxed{m < \frac{9}{7}}$$

III) $\dfrac{m+1}{m} > 0$

$-$	$+$	$+$	Numerador
$-$	$-$	$+$	Denominador
	-1	0	
$+$	$-$	$+$	P

$$\boxed{m < -1 \quad \text{ou} \quad m > 0}$$

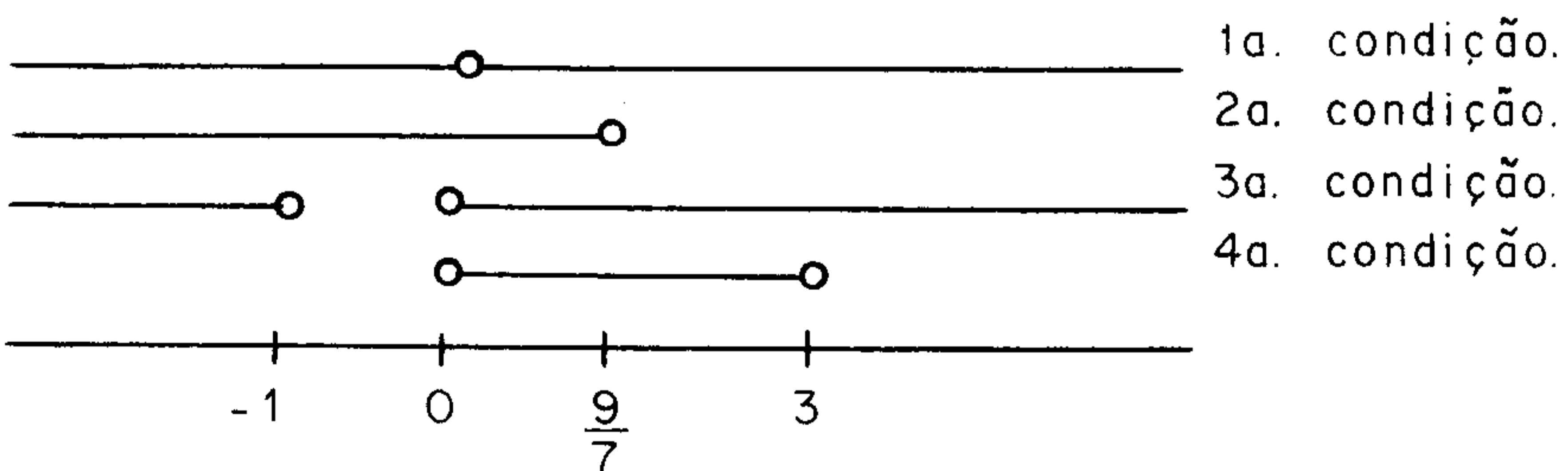
IV) $\dfrac{-2(m-3)}{m} > 0$

$\dfrac{m-3}{m} < 0$

$-$	$-$	$+$	Numerador
$-$	$+$	$+$	Denominador
	0	3	
$+$	$-$	$+$	Fração

$$\boxed{0 < m < 3}$$

Confrontando estas condições:

1a. condição.
2a. condição.
3a. condição.
4a. condição.

-1 0 $\frac{9}{7}$ 3

Logo, as quatro condições são satisfeitas para e só para $0 < m < \dfrac{9}{7}$

Resposta: $0 < m < \dfrac{9}{7}$

6.7) Determine m para que a equação $mx^2 + 2mx + (m - 3) = 0$ possua duas raízes reais negativas.

Solução: Devemos ter

S

I) $a \neq 0$ (para que a equação seja do segundo grau).

II) $\Delta' \geqslant 0$ (para que a equação possua raízes reais).

III) $P > 0$ (para que as raízes tenham o mesmo sinal).

IV) $S < 0$ (para que este sinal seja $-$).

Daí vem:

I) $\boxed{m \neq 0}$

II) $m^2 - m(m - 3) \geqslant 0$

$3m \geqslant 0$

$\boxed{m \geqslant 0}$

III) $\dfrac{m - 3}{m} > 0$

$-$	$-$	$+$	Numerador
$-$	$+$	$+$	Denominador
	0	3	
$+$	$-$	$+$	Fração

$\boxed{m < 0 \quad \text{ou} \quad m > 3}$

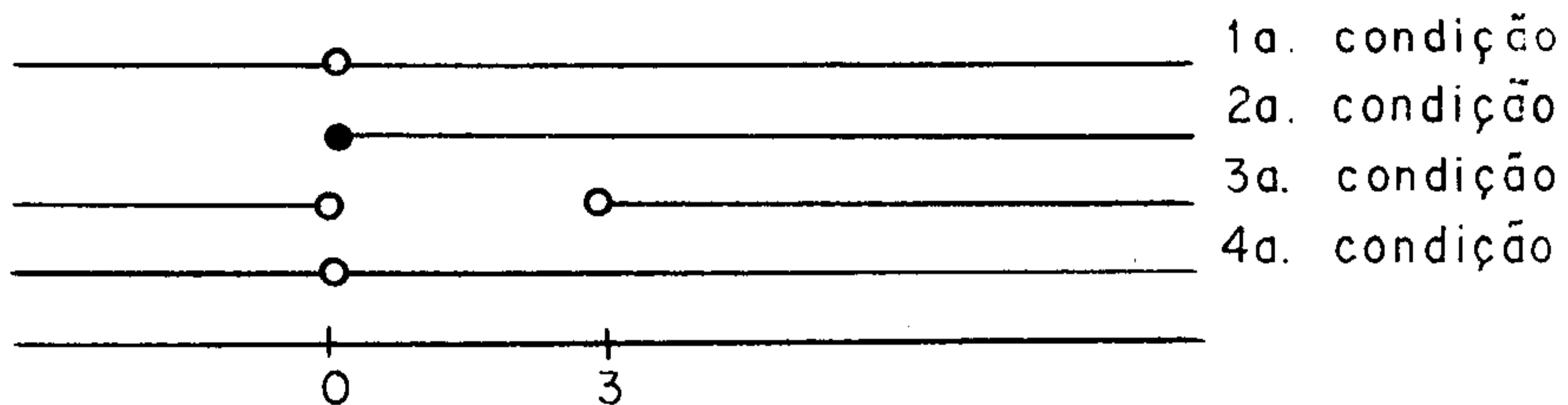
IV) $\dfrac{-2m}{m} < 0$

Como para $m \neq 0$, $\dfrac{-2m}{m} = -2 < 0$,

m pode ser qualquer, desde que diferente de zero

$\boxed{m \neq 0}$

Confrontando estas condições:

1a. condição
2a. condição
3a. condição
4a. condição
0 3

Logo, as quatro condições são satisfeitas para e só para $m > 3$.

Resposta: $m > 3$.

6.8) Determine m para que a equação $(m - 1)x^2 + 2mx + (m + 3) = 0$ possua duas raízes reais de sinais contrários.

Solução: Devemos ter:

I) $a \neq 0$ (para que a equação seja do segundo grau).

II) $\Delta' > 0$ (para que a equação tenha raízes reais distintas).

III) $P < 0$ (para que as raízes tenham sinais contrários).

Uma simplificação pode ser feita: A condição III nos diz que $P = \frac{c}{a} < 0$, isto é, que c e a têm sinais contrários. Mas sabemos que se c e a têm sinais contrários, então, $\Delta' > 0$. Logo, a condição II pode ser dispensada, pois III já assegura II. A condição I também pode ser dispensada, pois se $\frac{c}{a} < 0$, então, $a \neq 0$.

Logo, basta que $p < 0$.

Como $p = \frac{m+3}{m-1}$, devemos ter

$$\frac{m+3}{m-1} < 0$$

$-$	$+$	$+$	Numerador
$-$	$-$	$+$	Denominador
	-3	1	
$+$	$-$	$+$	Fração

$\boxed{-3 < m < 1}$ Resposta: $-3 < m < 1$.

7. OBTENÇÃO DA EQUAÇÃO DADAS AS RAÍZES

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ pode ser escrita

$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0$, isto é,

$$\boxed{x^2 - Sx + P = 0}$$

Fórmula que nos permite obter a equação do segundo grau dadas as raízes.

Problemas:

7.1) Forme a equação do segundo grau cujas raízes são $2 + \sqrt{3}$ e $2 - \sqrt{3}$

Solução: $S = (2 + \sqrt{3}) + (2 - \sqrt{3}) = 4$

$P = (2 + \sqrt{3}) \cdot (2 - \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$

A equação é $x^2 - Sx + P = 0$, ou seja, $x^2 - 4x + 1 = 0$.

Resposta: $x^2 - 4x + 1 = 0$.

7.2) Forme a equação biquadrada que admite 2 e 3 como raízes.

Solução:

A biquadrada é da forma $ax^4 + bx^2 + c = 0$

A equação auxiliar que permite resolvê-la é $ay^2 + by + c = 0$, onde $y = x^2$.

Como $y = x^2$, se 2 e 3 são raízes da biquadrada, 4 e 9 são raízes da equação auxiliar.

Então, é fácil formar a equação auxiliar.

$X = 4 + 9 = 13 \qquad P = 4.9 = 36$

A equação auxiliar é $y^2 - 13y + 36 = 0$

Logo, a biquadrada é $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

Resposta: $x^4 - 13x^2 + 36 = 0$

7.3) Sendo a e b as raízes da equação $x^2 + 4x + 1 = 0$, forme a equação cujas raízes são $a + 1$ e $b + 1$.

Solução: $S = (a + 1) + (b + 1) = (a + b) + + 2 = - 4 + 2 = - 2.$

$P = (a + 1).\ (b + 1) = ab + (a + b) + + 1 = 1 - 4 + 1 = - 2.$

A equação é $x^2 + 2x - 2 = 0$

Outro modo de resolver o problema:

Cada raiz y da nova equação é igual a uma raiz da antiga equação, x, mais um.

$y = x + 1.$

Daí, $x = y - 1.$

Como $x^2 + 4x + 1 = 0$, temos

$(y - 1)^2 + 4\,(y - 1) + 1 = 0$, ou seja,
$y^2 + 2y - 2 = 0$,

que é a nova equação.

Resposta: $x^2 + 2x - 2 = 0$

8. FÓRMULA DE NEWTON

Dada a equação $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$, que supomos desprovida de raízes nulas, representamos por S_n a soma das potências de expoente n das raízes (n inteiro qualquer), isto é, $S_n = x_1^n + x_2^n$.

Como x_1 e x_2 são raízes, temos

$ax_1^2 + bx_1 + c = 0$ e

$ax_2^2 + bx_2 + c = 0$

Multiplicando as igualdades acima por x_1^{n-2} e x_2^{n-2}, respectivamente, resulta

$ax_1^n + bx_1^{n-1} + cx_1^{n-2} = 0$ e

$ax_2^n + bx_2^{n-1} + cx_2^{n-2} = 0$.

Somando, vem

$$a(x_1^n + x_2^n) + b(x_1^{n-1} + x_2^{n-1}) + c(x_1^{n-2} + x_2^{n-2}) = 0$$

Isto é,

$$\boxed{a\ S_n + b\ S_{n-1} + c\ S_{n-2} = 0}$$

Problemas:

8.1) Calcule a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 + 3x + 1 = 0$, sem resolvê-la.

Solução: Pela fórmula de Newton,

$S_n + 3\ S_{n-1} + S_{n-2} = 0$.

Pondo $n = 2$, resulta

$S_1 + 3S_2 + S_o = 0$.

Mas, $S_o = x_1^o + x_2^o = 1 + 1 = 2$

$$S_1 = x_1^1 + x_2^2 = -\frac{b}{a} = -3$$

Daí, $S_2 + 3(-3) + 2 = 0$

$S_2 = 7$

Resposta: 7

8.2) Calcule a soma dos inversos das raízes de $2x^2 + 7x + 2 = 0$, sem resolvê-la.

Solução: Pela fórmula de Newton,

$2S_n + 7S_{n-1} + 2S_{n-2} = 0$

Pondo $n = 1$, resulta

$2S_1 + 7S_0 + 2S_{-1} = 0$

Como $S_1 = x_1^1 + x_2^1 = -\dfrac{b}{a} = -\dfrac{7}{2}$

$S_0 = x_1^0 + x_2^0 = 1 + 1 = 2$

Vem

$2\left(-\dfrac{7}{2}\right) + 7 \,.\, 2 + 2S - 1 = 0$

$7 + 2S - 1 = 0$

$S - 1 = -\dfrac{7}{2}$

Resposta: $-\dfrac{7}{2}$

9. TRANSFORMAÇÃO DE RADICAIS DUPLOS

A Fórmula

$$\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$$

$(A^2 - B \geqslant 0, \quad A \geqslant 0)$

É de extrema utilidade pois permite (quando $A^2 - B$ é um quadrado perfeito) transformar um radical duplo numa soma de radicais simples.

Para demonstrá-la, basta observar que

$$\left(\sqrt{\frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2}}\right)^2 =$$

$$= \frac{A+\sqrt{A^2-B}}{2} + \frac{A-\sqrt{A^2-B}}{2} \pm$$

$$\pm 2\sqrt{\frac{A^2-(A^2-B)}{4}} = A \pm \sqrt{B}$$

Problemas:

9.1) Simplifique $\sqrt{12+\sqrt{80}}$

Solução: $A = 12$

$B = 80$

$A^2 - B = 144 - 80 = 64.$

Daí,

$$\sqrt{12+\sqrt{80}} = \sqrt{\frac{12+\sqrt{64}}{2}} + \sqrt{\frac{12-\sqrt{64}}{2}} =$$

$$= \sqrt{10} + \sqrt{2}$$

9.2) Simplifique $\sqrt{4-2\sqrt{3}}$

Solução: $\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{4-\sqrt{12}}.$

Logo, $A = 4$ $B = 12$ $A^2 - B = 16 - 12 = 4.$

Daí,

$$\sqrt{4-2\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{4+\sqrt{4}}{2}} - \sqrt{\frac{4-\sqrt{4}}{2}} = \sqrt{3}-1.$$

PROBLEMAS

A

1) (UEG-64)

Sendo $\dfrac{x^2 - 2x}{3x - 6} = 1$, qual é o valor de x?

2) (AUSU-70)

A equação $\dfrac{x - 5}{x - 1} + x + 1 = 0$

a) Admite duas raízes reais e desiguais
b) Não admite raízes reais
c) Admite uma raiz real dupla
d) Admite três raízes reais
e) NRA.

3) (PUC-70)

Sobre as raízes da equação $3t^4 - 25t^2 - 18 = 0$, pode-se afirmar que:

a) Todas são reais
b) A soma dos módulos das raízes reais é $\dfrac{18 + 2\sqrt{6}}{2}$
c) As raízes reais pertencem ao intervalo $[-3, 3]$
d) As raízes reais são $-\dfrac{\sqrt{7}}{6}$ e $\dfrac{\sqrt{7}}{6}$
e) NRA.

4) (UGF-70)

As raízes da equação $x^2 + ax + b = 0$ são 4 e -8. Os valores de a e b são, respectivamente

a) $4, -32$ b) $8, -16$ c) $8, 16$ d) $4, 32$ e) $-4, -32$.

5) (UC-70)

As raízes da equação $2x^2 - 8x - 10 =$ são:

a) $-1; -5$ b) $1;5$ c) $2;3$ d) $5;1$ e) $-1;5$

6) (EPUSP-58)

As equações $(x - a)(x - b) = 0$ e $x^2 - 2 = 0$, onde a e b são racionais, podem admitir raízes comuns?

7) (UFRJ-71)

Resolva a equação $4 - \sqrt[3]{x^2 - 8} = 3$

8) (ITA-72)

Seja $f(x) = x^2 + px + p$ uma função real de variável real. Os valores de p para os quais $f(x) = 0$ possui raiz dupla positiva são:

a) $0 < p < 4$ b) $p = 4$ c) $p = 0$ d) $f(x) = 0$ não pode ter raiz dupla positiva e) NRA

9) (UFRJ-71)

Qual o valor de m que torna simétricas as raízes de $x^2 - 2(m + 1)x + (m - 2) = 0$?

10) (EESC-60)

Resolva a equação $2\sqrt{x} + \sqrt{1 - x} = 2$

11) (EESC-57)

Resolva a equação $\sqrt{2 + x} + \sqrt{2 - x} = \sqrt{2}$

12) (PUC-71)

Dada a igualdade $\sqrt{x + \sqrt{x - 1}} = \sqrt{2x - 3}$, podemos afirmar que:

a) Só existe um valor de x que verifica a igualdade

b) Existem dois valores de x que verificam a igualdade
c) $x = 3$ é raiz
d) Não há valores de x que verifiquem a igualdade
e) NRA.

13) (UFMG-62)

Resolva $\sqrt{x + 10} - \dfrac{6}{\sqrt{x + 10}} = 5.$

14) (PUC-69)

Determine as raízes de $\sqrt{28 + 2x} - \sqrt{21 + x} = 1.$

a) -12 e 4 b) -4 e 12 c) -12 d) 4 e) NRA.

15) (UFRJ-69)

Resolva a equação $\sqrt{x - 3} - \sqrt{2x + 2} = 2.$

16) (EPUSP-65) (CICE-70)

As raízes de

$|x|^2 + |x| - 6 = 0$

a) São positivas
b) Têm produto igual a -6
c) Têm soma 0.
d) Têm soma 1
e) NRA.

17) (ITA-72)

Sendo x_1 e x_2

as raízes de $x^{-1} - 4x^{-\frac{1}{2}} + 3 = 0$, temos

a) $x_1 = 1,\ x_2 = 1$

b) $x_1 = \dfrac{1}{3},\ x_2 = \dfrac{1}{3}$

c) $x_1 = 3,\ x_2 = 3$

d) A equação não tem raízes reais

e) NRA.

18) (ENCE-71)

Resolva a equação $\sqrt{2 - x} = x$.

19) (UFF-57)

Calcule a soma dos cubos das raízes da equação $x^2 - 6x - 2 = 0$.

20) (EN-57)

Resolva a equação $(m + 2)\,x^2 + 4x - (m + 1) = 0$, sabendo que o produto de suas raízes é $-\dfrac{3}{4}$.

21) (UFRRJ-57)

Calcule a de modo que a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 + (a - 5)\,x - (a + 4) = 0$ seja igual a 17.

22) (UEG-64)

Calcule p sabendo que a diferença das raízes da equação $2x^2 - (p - 1)\,x + (p + 1) = 0$ é igual a 1.

23) (PUCSP-70)

O conjunto-verdade da equação

$\sqrt{4x + 1} = 2x - 1$ é:

a) $\{2\}$

b) $\{0; 2\}$

c) $\{0\}$

d) $\left\{0, \dfrac{1}{2}\right\}$

e) NRA.

24) (FEI-66)

O número de raízes reais da equação $5x^4 + x^2 - 3 = 0$ é:

a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) NRA.

25) (FEI-68)

Seja V o conjunto dos números reais que são soluções da equação irracional

$\sqrt{2x} - \sqrt{7 + x} = 1$. Então,

a) $V = \{2, 18\}$

b) $V = \{2\}$

c) $V = \{18\}$

d) $V = \emptyset$

e) NRA.

26) (FEI-68)

a e b são as raízes de $2x^2 - 5x + m = 3$.

Se $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{3}$, o valor de m é:

a) $\frac{3}{4}$ b) $-\frac{4}{3}$ c) $\frac{27}{4}$ d) 0 e) NRA.

27) (PUCSP-70)

A equação $ax^2 + bx + c = 0$ admite duas raízes reais x_1 e x_2. Então,

a) $x_1 + x_2 = \frac{c}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{b}{a}$

b) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$

c) $x_1 + x_2 = \frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a}$

d) $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$ e $x_1 \cdot x_2 = -\frac{c}{a}$

e) NRA.

28) (COMCITEC-73)

A equação $x^8 - 13x^4 + 36 = 0$

a) Admite quatro raízes irracionais

b) Admite oito raízes reais

c) Não admite raízes reais

d) Admite quatro raízes reais inteiras

e) NRA.

29) (CICE-68-2c)

Para que valor de k a equação $3x^2 - 4x + k = 0$ possui raízes reais cujo produto é máximo?

a) $\frac{16}{9}$ b) $\frac{16}{3}$ c) $\frac{4}{9}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $-\frac{4}{3}$

30) (CICE-70)

Se $k > 0$ é tal que a equação $kx^2 - 4x + 1 = 0$ possui raízes reais cujo produto é mínimo, então,

a) $k = -4$ b) $k = 1$ c) $k = \frac{1}{4}$

d) $k = 4$ e) Impossível determinar k, pois $\lim_{K \to \infty} \frac{1}{k} = 0$

31) (PUC-58)

Calcule m de modo que uma das raízes de $x^2 + mx + 27 = 0$ seja o quadrado da outra.

32) (CICE-68-2c)

Para que valores de k a equação

$x = k^2 (x - 1)(x - 2)$ tem raízes reais?

a) Qualquer valor

b) Nenhum valor

c) $1 < k < 2$

d) $k < 1$ ou $k > 2$

e) $-2\sqrt{2} < k < 2\sqrt{2}$.

33) (ENCE-66)

Determine m para que a equação $(m + 1)x^2 - 2mx + (m + 5) = 0$ possua raízes reais e desiguais.

34) (SEG-67)

Dada a equação $2x^2 + x + 1 = 0$ de raízes x_1 e x_2, calcule o valor da expressão

$$\frac{x_1}{1 + x_2^2} + \frac{x_2}{1 + x_2^2}$$

35) (COMSART-73)

A equação do segundo grau cuja menor raiz é $2 - \sqrt{3}$ e o produto das duas raízes é 1 é expressa por:

a) $x^2 + x - 4 = 0$

b) $x^2 + 4x - 1 = 0$

c) $x^2 - x + 4 = 0$

d) $x^2 - 4x + 1 = 0$

e) NRA

36) (PUC-51)

Dada a equação em x,

$3x^2 - 5x + m = 0$,

determinar:

a) Os valores de m para os quais a equação tem raízes reais;

b) em função de m, a soma dos valores da expressão $\frac{3x - 2}{5x + 1}$ quando se substitui x sucessivamente pelas raízes da mesma equação.

37) Simplifique $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$

38) (CICE-69)

O número $\sqrt{7 + 4\sqrt{3}} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3}}$ é:

a) Irracional

b) Inteiro

c) Uma potência inteira de 7.

d) Imaginário

e) Racional não inteiro.

39) (PUC-57)

Determine o menor valor inteiro e positivo de a que permite transformar o radical $\sqrt{a + 3 + \sqrt{a^2 + 8}}$ numa soma de radicais simples e efetue a transformação para esse valor de a.

40) (CESCEA-72)

Considere o problema:

"Determinar o número cujo quíntuplo excede o seu quadrado de y unidades". Para que valores de y o problema possui duas soluções reais?

a) $y < \frac{25}{4}$ b) $y > \frac{29}{4}$ c) $y = 6$ d) $y > 7$ e) NRA

41) (UFF-57)

Qual a relação que deve existir entre a, b e c para que o radical duplo que aparece na resolução da equação biquadrada $ax^4 + bx^2 + c = 0$ possa ser transformado numa soma de radicais simples?

42) (UFRJ-62)

Resolva o sistema

$$\begin{cases} x - y = 8 \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2 \end{cases}$$

43) (EMMOP-61)

Resolva o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ x^4 + y^4 = 17 \end{cases}$$

44) (EMMOP-61)

Resolva o sistema

$$\begin{cases} x + 2y - z = 11 \\ x^2 - 4y^2 + z^2 = 37 \\ xz = 24 \end{cases}$$

45) (CICE-70-2c) —

Considere o sistema não linear

$$\begin{cases} x - y + z = 1 \\ x + y - z = 1 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 9. \end{cases}$$

a) O sistema não admite solução.

b) Todas as soluções do sistema formado pelas duas primeiras equações satisfazem à terceira equação.

c) O sistema admite uma solução tal que $x + y + z = 1$.

d) O sistema admite uma solução tal que $x + y + z = 5$.

e) O sistema admite uma solução tal que $x+y+z= -1$.

46) (COMCITEC-73)

Determinando-se os pares (x, y) de números reais que satisfaçam às condições

$$\begin{cases} y = x^2 + 2x \\ x^2 + y^2 \leqslant 1 \\ y = x \end{cases}$$

tem-se

a) dois pares
b) nenhum par
c) três pares
d) uma infinidade de pares
e) um único par.

47) (IME-71)

Resolva o sistema

$$\begin{cases} x^{1/4} + y^{1/5} = 3 \\ x^{1/2} + y^{2/5} = 5 \end{cases}$$

a) $\begin{cases} x = -1, y = 32 \\ x = 16, y = 1 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x = 2, y = 0 \\ x = 16, y = 32 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x = 1, y = 1 \\ x = 16, y = 16 \end{cases}$ d) $\begin{cases} x = 1, y = 32 \\ x = 16, y = 1 \end{cases}$

e) $\begin{cases} x = 0, y = -1 \\ x = 32, y = 32 \end{cases}$ f) NRA.

48) (SM-68)

$$\sqrt{-\sqrt{3} + \sqrt{3 + 8\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}}} =$$

a) 2^{-2} b) 2^{-1} c) 3^{-2} d) 3^{-1} e) NRA.

49) (UGF-73)

Quais as verdadeiras dentre as proposições abaixo?

I) A soma das raízes da equação $x^2 - 6x + 8 = 0$ é 6.

II) O produto das raízes da equação $3x^2 - 6x - 12 = 0$ é -4.

III) A soma das raízes da equação $2x^2 - x + 1 = 0$ é 1.

IV) O produto das raízes da equação $2x^2 - 5x = 8$ é -4.

50) (UGF-73)

Calcule m para que a função quadrática $y = 2mx^2 - (1 + m)x + 1$ só admita uma única raiz real.

51) (FIB-72)

Resolva a equação

$$\frac{x-2}{3x} + \frac{2x-1}{2} = \frac{5x+2}{6}$$

a) -1 e 4 b) -1 e 3 c) 1 e -4 d) 1 e -3 e) 1 e 3.

52) (PUCSP-70)

Uma equação do tipo $ax^2 + bx + c = 0$, onde a, b e c são números reais

a) Tem sempre duas raízes reais.

b) Pode ter uma só raiz imaginária.

c) Pode ser uma equação do primeiro grau.

d) Nunca terá raízes iguais.

e) NRA.

53) (UFPA-65)

Determine as raízes da equação $x^4 - 3x^2 + 2 = 0$

54) (U.C.M.6-65)

Resolva a equação $\sqrt{x + a} + \sqrt{x - a} = \sqrt{3x}$

55) (UFMG-66)

Calcule m para que a soma dos quadrados das raízes da equação $x^2 - mx + 2m + 4 = 0$ seja igual a 13.

56) (EESC-64)

Resolva a equação $\sqrt{x^2 - 4} = x - 4$.

PROBLEMAS

B

1) (UGF-70)

O conjunto dos valores inteiros e positivos de m para os quais a equação $x^2 - 5mx + 2m = 0$ tem ambas as raízes reais e distintas é

a) $\{0, 1, 2, \ldots\}$
b) $\{4, 5, 6, \ldots\}$
c) $\{1, 2, 3,\}$
d) $\{1, 2, 3, \ldots\}$
e) NRA.

2) (UFRJ-70)

Resolva $6x^5 - 13x^4 + 6x^3 = -6x^2 + 13x - 6$.

3) (UFRJ-62)

Resolva a equação

$$\sqrt{x + \sqrt{x}} - \sqrt{x - \sqrt{x}} = 2\sqrt{\frac{x}{x + \sqrt{x}}}$$

4) (ITA-72)

Todas as raízes reais da equação

$$\sqrt{\frac{x^2 + 3}{x}} - \sqrt{\frac{x}{x^2 + 3}} = \frac{3}{2} \quad \text{são}$$

a) $x_1 = 3,\ x_2 = -3$
b) $x_1 = 3,\ x_2 = 3$
c) $x_1 = 3,\ x_2 = \sqrt{3}$
d) A equação não tem raízes reais
e) NRA.

5) (MAPOFEI-73)

Determine os valores reais de λ para os quais a equação $\sqrt{x^2 + 1} = \lambda x - 1$ admite solução real.

6) Determine a equação de segundo grau de coeficientes racionais em que uma das raízes é $3 + \sqrt{5}$.

7) (UFRRJ-60)

Para que valores de k as equações $x^2 - 5x + k = 0$ e $x^2 - 7x + 2k = 0$ admitem soluções de modo que uma das raízes da segunda equação seja o dobro de uma das raízes da primeira?

8) Calcule a para que as equações $x^2 + x + a = 0$ e $x^2 + ax + 1 = 0$ possuam pelo menos uma raiz comum.

9) (IME-45)

Determine m e n para que as equações $(2n + m) x^2 - 4mx - 3 = 0$ e $(6n + 3m)x^2 - 3(n - 1) x - 9 = 0$ tenham as mesmas raízes.

10) (UFRJ-64)

Dada a equação $ax^2 + 3x + 1 = 0$:

a) Determine o valor de a de modo que as duas raízes obedeçam à relação $x' = 2x''$.

b) Com este valor de a, obtenha outra equação $Ay^2 + By + C = 0$ cujas raízes estejam relacionadas com as da equação anterior, do seguinte modo:

$$\begin{cases} y' = x' + x'' \\ y'' = x' - x'' \end{cases}$$

11) (ITA-73)

Seja $\mathbb{R}$ o conjunto dos números reais. Sejam p e q os catetos de um triângulo retângulo cuja altura

relativa à hipotenusa é a. Podemos afirmar que a equação

$$\frac{2x^2}{p} - \frac{2x}{h} + \frac{1}{q} = 0$$

a) Não admite raízes reais.

b) Admite uma raiz da forma $m\sqrt{-1}$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$

c) Admite sempre raízes reais.

d) Admite uma raiz da forma $-m\sqrt{-1}$, $m \in \mathbb{R}$, $m > 0$

e) NRA.

12) (UFF-54) (UFF-67-2c)

Determine p e q na equação $x^2 + px + q = 0$, sabendo que suas raízes aumentadas de uma unidade são as raízes de $x^2 - px^2 + pq = 0$.

13) (USP-62)

Mostre que existe uma relação independente de m entre a soma e o produto das raízes da equação $(1 + m)x^2 - (1 + m^2)x + m(1 - m) = 0$.

14) (UFRRJ-67) (ENCE-69)

Determine k para que as raízes de $kx^2 - 2(k + 1)x + (k + 2) = 0$ sejam positivas.

15) (EESC-60)

Sob que condições

$$\sqrt{a + \sqrt{a^2 - b}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - b}} = \sqrt{2a + 2\sqrt{b}}\,?$$

16) (EESC-58-ac)

Sendo x a variável real, $a > 0$, $f(x) = \sqrt{a + \sqrt{a^2 - x^2}} + \sqrt{a - \sqrt{a^2 - x^2}}$ e $g(x) = \sqrt{a + x}$, determine os valores de x para os quais se tem $f(x) = \sqrt{2}\, g(x)$.

17) (UGF-73)

Calcule p para que as equações $x^2 + 11x + p = 0$ e $x^2 + 17x + 2p = 0$ possuam uma raiz comum.

18) (SM-68)

Dada a equação $x^4 - (3m + 4) x^2 + (m + 1)^2 = 0$

a) Nenhum valor de m torna a soma dos valores absolutos das quatro raízes igual a 12.

b) $m = \sqrt{43}$ torna a soma dos valores absolutos das quatro raízes igual a 12.

c) $m = 6$ torna a soma dos valores absolutos das quatro raízes igual a 12.

d) NRA.

19) (UFB-65)

Calcule m e n para que as raízes da equação $(n + m) x^2 - 4mx - 3 = 0$ sejam os inversos das raízes da equação $9y^2 + 3 (n - 1) y - (6n + m) = 0$.

20) (UFMG-68)

Resolva a equação $\sqrt{2 + \sqrt{x - 5}} - \sqrt{13 - x} = 0$.

21) (EN-72)

Três máquinas P, Q e R, trabalhando juntas, fazem um trabalho em x horas. Trabalhando sozinha, P necessita de 6 horas adicionais para fazer o trabalho; Q, uma hora adicional e R, x horas adicionais. O valor de x é:

a) $\frac{2}{3}$ b) $\frac{11}{12}$ c) $\frac{3}{2}$ d) 2 e) 3

22) (ITA-69)

Seja A o conjunto de todos os polinômios p(x) de segundo grau que se anulam para $x = 1$ e $x = 2$. Seja B o conjunto de todos os polinômios P(x) de segundo grau que se anulam para $x = 1$, $x = 2$ e $x = 3$.

Então:

a) $A = B$ b) $A \cup B = B$ c) $A \subset B$ d) $B \subset A$ e) NRA

23) Se as raízes da equação $x^2 - kx + 6 = 0$ são 5 unidades maiores que as raízes de $x^2 + kx + 6 = 0$, então,

a) $k = 5$ b) $k = -5$ c) $k = 7$ d) $k = -7$ e) NRA

24) Se $a_2 \neq 0$ e r e s são as raízes de $a_0 + a_1x + a_2 = 0$, então, a igualdade $a_0 + a_1x + a_2x^2 = a_0\left(1 - \frac{x}{r}\right)\left(1 - \frac{x}{s}\right)$ se verifica:

a) Para todos os valores de x, $a_0 \neq 0$
b) Para todos os valores de x
c) Só para $x = 0$
d) Só para $x = r$ ou $x = s$
e) Só para $x = r$ ou $x = s$, $a_0 \neq 0$.

25) (EESC-71)

Considere as afirmações

I) Se x_1, x_2, x_3, x_4 são números racionais e $x_1 + x_2\sqrt{2} = x_3 + x_4\sqrt{2}$, então, necessariamente, $x_1 = x_3$ e $x_2 = x_4$.

II) As raízes de $x^2 + 2|x| - 3 = 0$ são também raízes de $x^2 + 2x - 3 = 0$.

III) Existe $m < 0$ tal que $|m|x^2 + mx + m = 0$ não possui solução real.

Então:

a) Somente I é correta
b) Somente II é correta
c) Somente III é correta
d) I, II e III são corretas
e) Todas são falsas.

PROBLEMAS

C

1) (UFMG-59)

Resolva a equação $2x^2+3x-3+\sqrt{2x^2+3x+9}=30.$

2) (ITA-73)

A respeito da equação $3x^2 - 4x + \sqrt{3x^2 - 4x - 6} = 18$, podemos dizer que:

a) $\frac{2 \pm \sqrt{70}}{3}$ são raízes.

b) A única raiz é $x = 3$.

c) A única raiz é $x = 2 + \sqrt{10}$

d) Tem duas raízes reais e duas imaginárias.

e) NRA.

3) (EMMOP-61)

Resolva a equação $\sqrt[3]{x - a} + \sqrt[3]{x + a} = \sqrt[3]{x}.$

4) (UFF-55)

Resolva a equação $\sqrt[3]{x + 1} - \sqrt{x + 2} + 1 = 0$

5) (UFRRJ-61)

Resolva a equação $2\sqrt[n]{1 - x} + \sqrt[n]{1 + x} = 3\sqrt[2n]{1 - x^2}$

6) (UFRJ-58)

Resolva a equação $\sqrt{a^2 + x} + \sqrt{b^2 + x} = a + b.$

7) (CICE-69-2c)

O sistema

$$\begin{cases} x^2 + 5y^2 + 6z^2 + 8\,(yz + zx + xy) = 36 \\ 6x^2 + y^2 + 5z^2 + 8\,(yz + zx + xy) = 36 \\ 5x^2 + 6y^2 + z^2 + 8\,(yz + zx + xy) = 36 \end{cases}$$

a) Tem uma infinidade de soluções

b) Tem seis soluções

c) Tem duas soluções

d) Tem oito soluções

e) NRA.

8) Prove que, se p e q são inteiros ímpares, a equação

$x^2 + 2px + 2q = 0$ não pode ter raízes racionais.

9) Transforme $\sqrt[3]{10 + \sqrt{108}}$ numa soma de radicais simples.

10) (UFRJ-64)

Resolva a equação $2\,(1 - x)^{13/} + (1 + x)^{1/3} =$
$= 3\,(1 - x^2)^{1/6}$.

11) Se $\sqrt[3]{x + 9} - \sqrt[3]{x - 9} = 3$, então, x^2 está compreendido entre

a) 55 e 65 b) 65 e 75 c) 75 e 85 d) 85 e 95

e) 95 e 105.

12) Quantas soluções inteiras possui a equação

$(x - 8)\ (x - 10) = 2^y$?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) NRA.

RESPOSTAS

PROBLEMAS A

1) $x = 3$ 2) A 3) C

4) A 5) E 6) Não

7) $x_1 = 3$; $x_2 = -3$ 8) D

9) $m = -1$ 10) $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{9}{25}$

11) Impossível 12) A

13) $x = 26$ 14) D

15) Impossível 16) C

17) E 18) $x = 1$ 19) 252

20) $x_1 = \frac{1}{2}$; $x_2 = -\frac{3}{2}$ 21) $a = 4$

22) $p = -1$ ou $p = 11$ 23) A

24) B 25) C 26) C 27) B 28) A

29) D 30) D 31) $m = -12$ 32) A

33) $m < -1$ ou $-1 < m < -\frac{5}{6}$ 34) $-\frac{3}{2}$

35) D 36) a) $m \leqslant \frac{25}{12}$ b) $\frac{30m - 47}{25m + 28}$

37) $\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ 38) B 39) $a=4$; $1 + \sqrt{6}$ 40) A 41) $\frac{c}{a}$ deve ser quadrado perfeito 42) $x = 9$; $y = 1$

43) $x_1 = 1$ $y_1 = 2$; $x_2 = 1$ $y_2 = -2$; $x_3 = -1$ $y_3 = 2$; $x_4 = -1$ $y_4 = -2$; $x_5 = 2$ $y_5 = 1$; $x_6 = 2$ $y_6 = -1$; $x_7 = -2$ $y_7 = 1$; $x_8 = -2$ $y_8 = -1$

44) $x_1 = 8$ $y_1 = 3$ $z_1 = 3$; $x_2 = -3$ $y_2 = 3$ $z_2 = -8$

45) D 46) E 47) D 48) E 49) I, II, IV

50) $3 \pm 2\sqrt{2}$ 51) A 52) C 53) $x_1 = -\sqrt{2}$ $x_2 = -1$ $x_3 = 1$ $x_4 = \sqrt{2}$ 54) $x = \dfrac{2\sqrt{3}\,|a|}{3}$

55) $m = -3$ ou $m = 7$ 56) Impossível.

PROBLEMAS B

1) D 2) $x_1 = -1$; $x_2 = \frac{2}{3}$; $x_3 = \frac{3}{2}$

3) $x = 1$ 4) E 5) $\lambda < -1$ ou $\lambda > 1$

6) $x^2 - 6x + 4 = 0$ 7) $k = 0$ ou $k = 6$

8) $a = 1$ ou $a = -2$ 9) $n - 1 = 4m$ 10) $a = 2$
b) $4y^2 + 8y + 3 = 0$ 11) C 12) $p_1 = 1$ q_1 qualquer; $p_2 = -2$ $q_2 = -1$

13) $S + P = 1$ $(m \neq -1)$ 14) $k < -2$ ou $k > 0$

15) $a \geqslant 0$ e $a^2 \geqslant b \geqslant 0$ 16) $0 \leqslant x \leqslant a$

17) $p = 0$ ou $p = 30$ 18) C

19) $m = 0$, $n = 1$ 20) $x = 9$ 21) A

22) D 23) A 24) A 25) A

PROBLEMAS C

1) $x_1 = 3;\ x_2 = -\dfrac{9}{2}$ 2) D 3) $x_1 = 0;$

$x_2 = -\dfrac{3\sqrt{21}\,a}{14};\ x_3 = \dfrac{3\sqrt{21}\,a}{14}$

4) $x_1 = -2;\ x_2 = -1;\ x_3 = 7$ 5) $x_1 = 0;\ x_2 = \dfrac{4^n - 1}{4^n + 1}$

6) Se $a \geqslant 0$ e $b \geqslant 0$, então, $x = 0$. Se $a = -b$, então, $x = -a^2$. Em qualquer outro caso a equação é impossível. 7) D 9) $1 + \sqrt{3}$

10) $x_1 = 0\ \ x_2 = \dfrac{63}{65}$ 11) C 12) C

CAPÍTULO 8

TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

1. TRINÔMIO DO SEGUNDO GRAU

Um trinômio do segundo grau é um polinômio da forma $ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$. Raízes ou zeros do trinômio são as raízes da equação $ax^2 + bx + c = 0$. E o discriminante do trinômio é o discriminante da mesma equação.

2. FORMA CANÔNICA

Dado o trinômio $y = ax^2 + bx + c$, podemos escrever

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] =$$

$$= a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{b^2}{4a^2} + \frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right] =$$

$$= a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a^2}\right]$$

Logo, temos:

$$y = a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$$

que é a forma canônica do trinômio.

Problemas:

2.1) Coloque $y = 3x^2 - x + 4$ na forma canônica.

Solução: $\Delta = (-1)^2 - 4.3.4 = 1 - 48 = -47$

Logo,

$$y = 3\left[\left(x + \frac{-1}{6}\right)^2 - \frac{-47}{4.3^2}\right] =$$

$$= 3 \quad \left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{47}{36}\right]$$

Resposta: $y = 3 \quad \left[\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{47}{36}\right]$.

3. FATORAÇÃO

Se o discriminante do trinômio $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ for maior ou igual a zero, ele terá duas raízes reais, x_1 e x_2.

Então, podemos escrever:

$$y = a\left[x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right] = \left[a\,x^2 - (x_1 + x_2)\,x + x_1x_2\right] =$$

$$= a\,[\,x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2] =$$

$$= a\,[\,x(x - x_1) - x_2\,(x - x_1)] =$$

$$= [a\,(x - x_1)\,(x - x_2)]$$

Portanto, o trinômio se fatora em

$$\boxed{y = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)}$$

Problemas:

3.1) Fatore $3x^2 + 4x - 7$

Solução: As raízes do trinômio são $-\frac{7}{3}$ e 1.

Então, $3x^2 + 4x - 7 = 3\left(x + \frac{7}{3}\right)(x - 1) =$

$= (3x + 7)(x - 1)$

Resposta: $(3x + 7)(x - 1)$.

4. SINAL DO TRINÔMIO

I) Consideremos um trinômio do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cujo discriminante seja negativo.

Como $y = a\left[\left(x + \frac{6}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a^2}\right]$.

O colchete será, para todo x, positivo (pois é a soma de um quadrado com um número positivo).

Então, quando $\Delta < 0$, qualquer que seja o valor atribuído a x, o valor do trinômio terá o sinal de a.

II) Consideremos um trinômio do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cujo discriminante seja nulo.

Então, da forma canônica,

$$y = a \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 .$$

O colchete é nulo para $x = -\frac{b}{2a}$ (que é a raiz dupla do trinômio) e positivo, caso contrário.

Então, quando $\Delta = 0$, se x for igual à raiz dupla, o trinômio será nulo, e se x for diferente da raiz dupla, o trinômio terá o sinal de a.

III) Consideremos um trinômio do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ cujo discriminante seja positivo.

Então, da fórmula de fatoração, $y = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Se atribuirmos a x o valor x_1 ou o valor x_2, y será, evidentemente, nulo.

Se atribuirmos a x um valor compreendido entre x_1 e x_2, uma das diferenças $(x - x_1)$ e $(x - x_2$ será positiva e a outra, negativa. Então, o produto $(x - x_1)(x - x_2)$ será negativo e y terá sinal contrário ao de a.

Se atribuirmos a x um valor fora do intervalo das raízes, as diferenças $(x - x_1)$ e $(x - x_2)$ serão ambas positivas ou ambas negativas. Então, o produto $(x - x_1)(x - x_2)$ será positivo e y terá o sinal de a.

Então, quando $\Delta = 0$, se x for raiz, o trinômio será nulo; se x estiver entre as raízes, o trinômio terá sinal contrário ao de a; e se x for exterior ao intervalo das raízes, o trinômio terá o sinal de a.

Problemas:

4.1) Resolva a inequação $x^2 - 5x - 6 < 0$.

Solução: As raízes do trinômio $x^2 - 5x + 6$ são 2 e 3. Como $a = 1 > 0$, sua variação de sinal é

```
  −     0     −     0   .+       y
————————|———————————|——————————  x
        2           3
```

Então, $x^2 - 5x + 6 < 0$ para e só para $2 < x < 3$.

Resposta: $2 < x < 3$.

4.2) Resolva a inequação $-x^2 + 4x - 3 < 0$.

Solução: As raízes de $-x^2 + 4x - 3$ são 1 e 3. Como $a = -1 < 0$, sua variação de sinal é

−	0	+	0	−	y
	1		3		x

Então, $-x^2 + 4x - 3 < 0$ para e só para $x < 1$ ou $x > 3$.

Resposta: $x < 1$ ou $x > 3$.

4.3) Resolva a inequação $x^2 + 4x + 4 > 0$.

Solução: $x^2 + 4x + 4$ tem raiz dupla igual a -2. Como $a = 1 > 0$, sua variação de sinal é

+	0	+	y
	−2		x

Logo, $x^2 + 4x + 4 > 0$ para e só para $x \neq 2$.

Resposta: $x \neq -2$.

4.4) Resolva a inequação $x^2 + x + 1 < 0$.

Solução: $x^2 + x + 1$ não tem raízes reais. Como $a = 1 > 0$, $x^2 + x + 1$ é sempre positivo.

Logo, $x^2 + x + 1 > 0$ para nenhum valor de x.

Resposta: Impossível.

5. POSIÇÃO DE UM NÚMERO EM RELAÇÃO ÀS RAÍZES

Dado o trinômio $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, $\Delta > 0$) Desejamos saber a posição do número n em relação às suas raízes. Para isto, calculemos $f(n) = an^2 + bn + c$.

I) Se $a.f(n) < 0$, $f(n)$ terá sinal oposto ao de a. Logo, n será interior ao intervalo das raízes do trinômio.

II) Se $a.f(n) = 0$, teremos, já que $a \neq 0$, $f(n) = 0$ e n será raiz do trinômio.

III) Se $a.f(n) > 0$, $f(n)$ terá o sinal de a. Logo, n será exterior ao intervalo das raízes do trinômio. Para saber se n é maior ou menor que as raízes, basta comparar n com a média aritmética das raízes,

$$\frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{b/a}{2} = -\frac{b}{2a}$$

$$x_1 \qquad \frac{-b}{2a} \qquad x_2$$

Se $n > -\frac{b}{2a}$, n será maior que as raízes e se $n < \frac{-b}{2a}$, n será menor que as raízes.

Resumindo:

$a.f(n) < 0$	n é interior às raízes		
$a.f(n) = 0$	n é raiz		
$a.f(n) > 0$	n é exterior às raízes	$n > \frac{-b}{2a}$	n é maior que as raízes
		$n < \frac{-b}{2a}$	n é menor que as raízes

Problemas:

5.1) Determine m para que a equação $x^2 - (m - 4)x + (m - 1) = 0$ tenha raízes inferiores a 6.

Solução: Devemos ter

I) $\Delta \geqslant 0$ (para que a equação tenha raízes)

II) $a.f(6) > 0$ (para que 6 seja exterior ao intervalo das raízes)

III) $6 > \dfrac{-b}{2a}$ (para que 6 seja maior que as raízes).

Daí,

I) $(m - 4)^2 - 4(m - 1) \geqslant 0$

$m^2 - 12m + 20 \geqslant 0$

+	0	−	0	+
	2		10	

$$\boxed{m \leqslant 2 \quad \text{ou} \quad m \geqslant 10}$$

II) $1.[36 - (m - 4).6 + (m - 1)] > 0$

$-5m + 59 > 0$

$$\boxed{m < \frac{59}{5}}$$

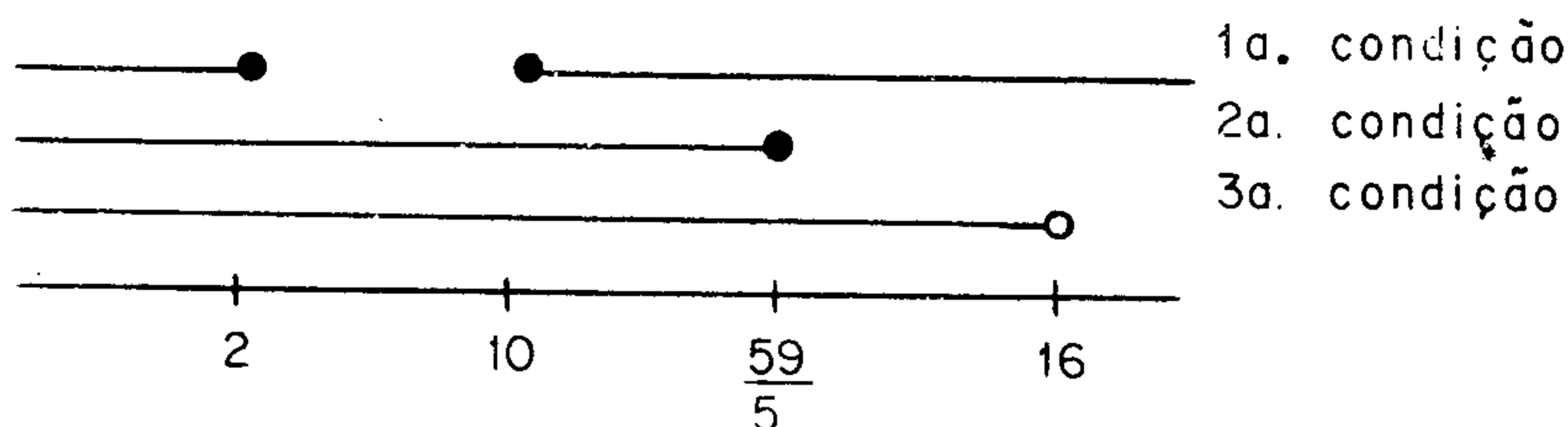
III) $6 > \dfrac{m - 4}{2}$

$12 > m - 4$

$$\boxed{m < 16}$$

Confrontando estas condições

1a. condição
2a. condição
3a. condição

2 10 $\frac{59}{5}$ 16

Obtemos

$$m \leqslant 2 \quad \text{ou} \quad 10 \leqslant m < \frac{59}{5}.$$

Resposta: $m \leqslant 2$ ou $10 \leqslant m < \dfrac{59}{5}$.

5.2) Determine m para que a equação $mx^2 + (m - 1) x + 3 = 0$ possua raízes reais, uma superior e outra inferior a 2.

Solução: Devemos ter:

I) $a \neq 0$ (para que a equação seja do segundo grau).

II) $\Delta > 0$ (para que ela tenha duas raízes reais distintas).

III) $a.f(2) < 0$ (para que o número 2 fique compreendido entre as raízes).

Observe o leitor que a condição III implica as condições I (pois se $a.f(2) < 0$, então, $a \neq 0$) e II (pois se $a.f(2) < 0$, não se pode ter nem $\Delta < 0$ nem $\Delta = 0$).

Então, basta que $a.f(2) < 0$.

Daí, $m . [4m + (m - 1) . 2 + 3] < 0$

$m . (6m + 1) < 0$

$6m^2 + m < 0$

$$\begin{array}{ccccc} + & 0 & - & 0 & + \\ \hline & \frac{-1}{6} & & 0 & \end{array}$$

$$\boxed{\frac{-1}{6} < m < 0}$$

Resposta: $\frac{-1}{6} < m < 0$

6. INEQUAÇÕES IRRACIONAIS

Para a resolução das inequações irracionais usamos o lema:

"Se $a, b > 0$, então, $a < b \Leftrightarrow a^2 < b^2$".

Com efeito, se $a < b$, então, $a - b < 0$. Como $a + b > 0$, $(a - b) (a + b) < 0$.

Daí, $a^2 - b^2 < 0$ e $a^2 < b^2$.

Reciprocamente, se $a^2 < b^2$, então, $a^2 - b^2 < 0$, isto é, $(a - b) (a + b) < 0$. Como $a + b > 0$, resulta $a - b < 0$, ou seja, $a < b$.

Analogamente, concluiríamos que:

"Se $a, b > 0$, então, $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$".

"Se $a, b > 0$, então, $a \geqslant b \Leftrightarrow a^2 \geqslant b^2$".

"Se $a, b > 0$, então, $a \leqslant b \Leftrightarrow a^2 \leqslant b^2$".

Em suma:

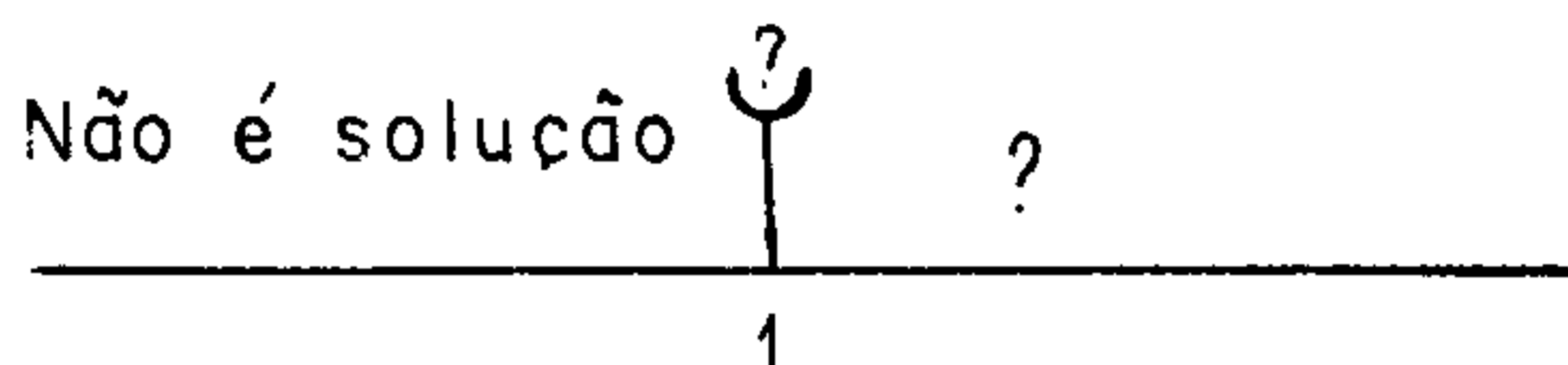
"Podemos elevar ao quadrado ambos os membros de uma inequação desde que esses dois membros sejam positivos".

É claro que a situação é análoga para qualquer expoente par. Para o caso do expoente ímpar não há necessidade de os dois membros serem positivos.

Problema:

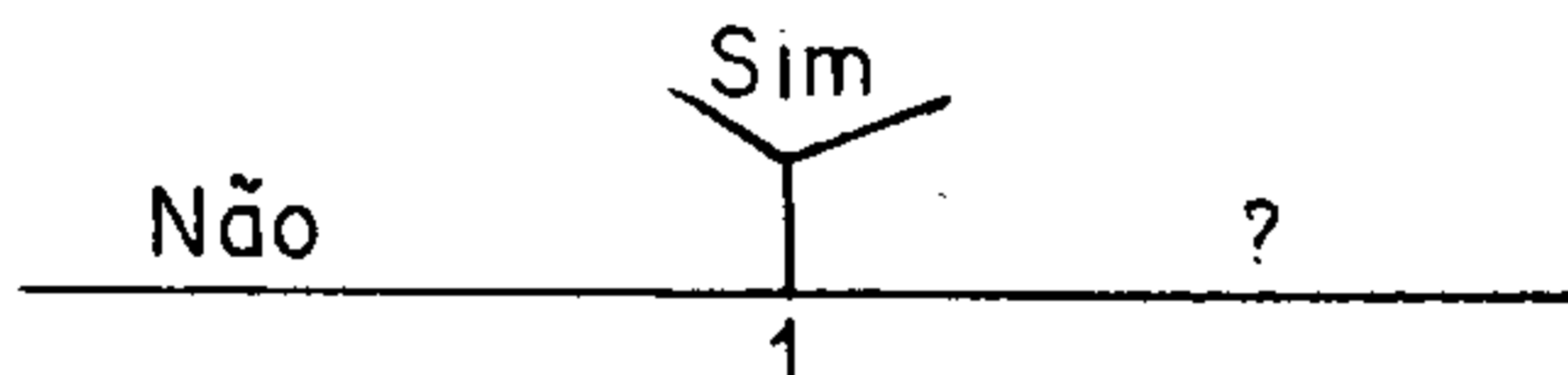
6.1) Resolva a inequação $\sqrt{x-1} < 3 - x$.

Solução: O primeiro membro só é real se $x - 1 \geqslant 0$, isto é, se $x \geqslant 1$.

Então, já podemos garantir que

Não é solução ? ?
1

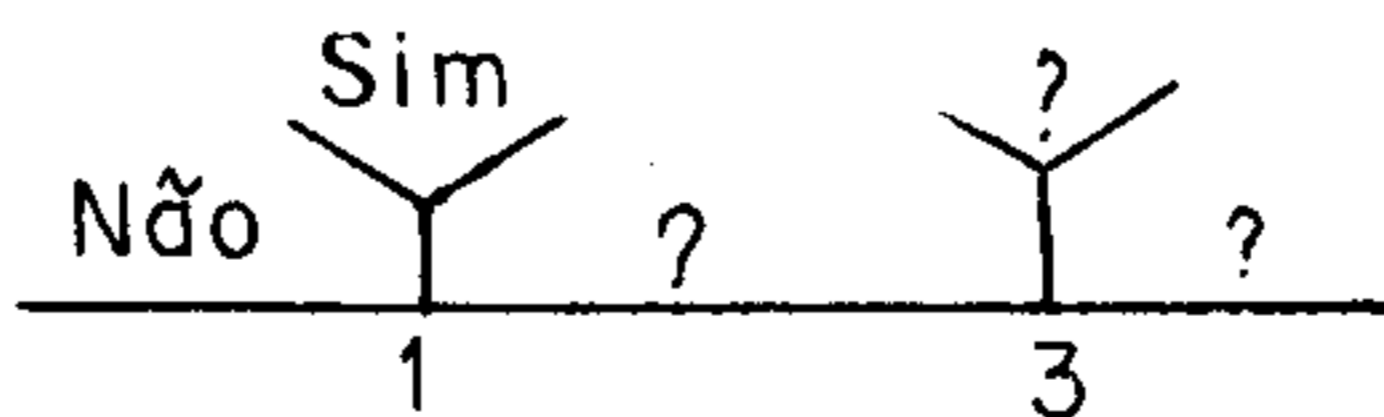
$x = 1$, conforme é fácil verificar, é solução, pois para $x = 1$ a inequação é $0 < 2$.

Então,

Sim
Não ?
1

Será que, para dirimir a dúvida sobre se $x > 1$ é solução, podemos elevar ao quadrado ambos os membros?

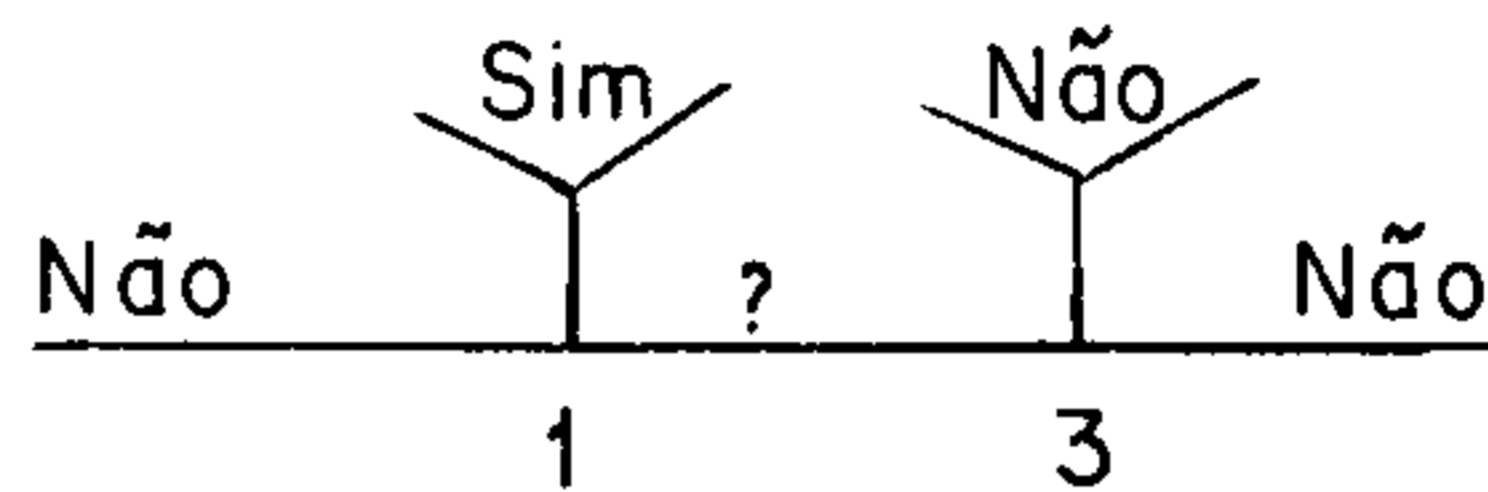
Isto poderá ser feito se os dois membros forem positivos. Para $x > 1$, $\sqrt{x-1}$ é positivo. $3 - x$ é positivo só se $x < 3$.

Então,

Sim ?
Não ? ?
1 3

$x = 3$ não é solução, pois se $x = 3$ a inequação é $\sqrt{2} < 0$.

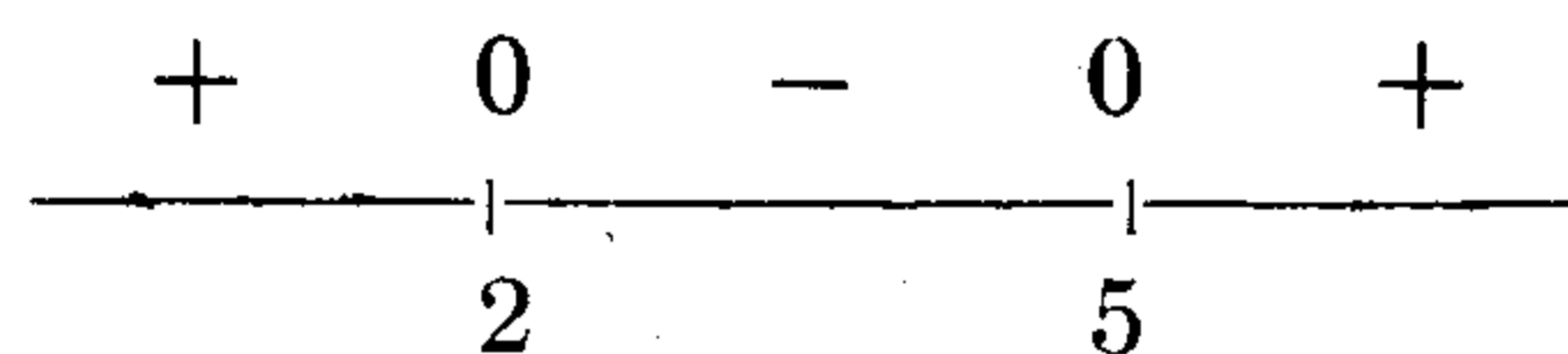
$x > 3$ também não é solução, pois para $x > 3$ o primeiro membro é positivo e o segundo é negativo. Logo, o primeiro membro não pode ser menor que o segundo.

Logo,

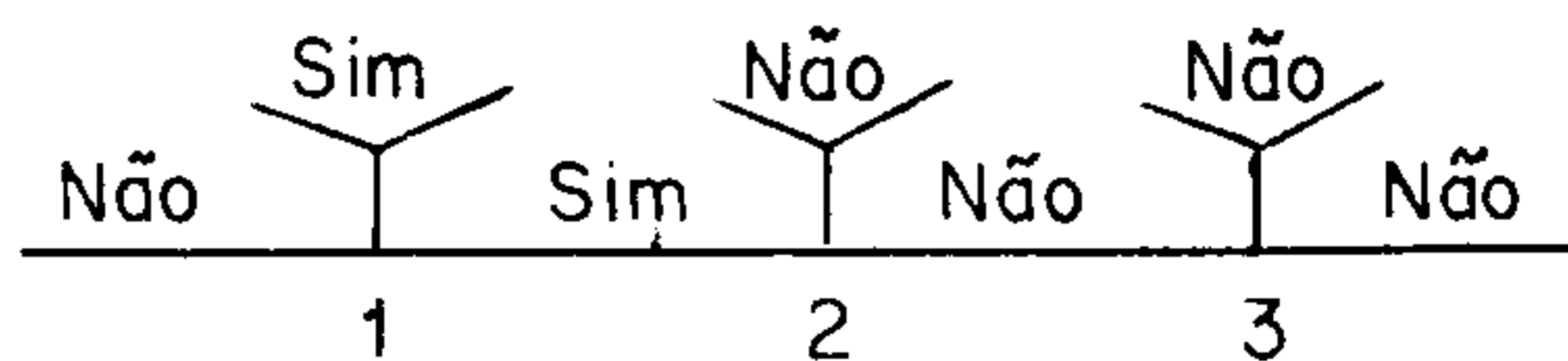
Não | Sim (1) | ? | Não (3) | Não

Para $1 < x < 3$, os dois membros são positivos. Logo, podemos elevar ao quadrado, obtendo

$x - 1 < 9 - 6x + x^2$, isto é,

$x^2 - 7x + 10 > 0$

$+ \quad 0 \quad - \quad 0 \quad +$ (zeros em 2 e 5)

Portanto, para $1 < x < 3$, a inequação é satisfeita se e só se $1 < x < 2$.

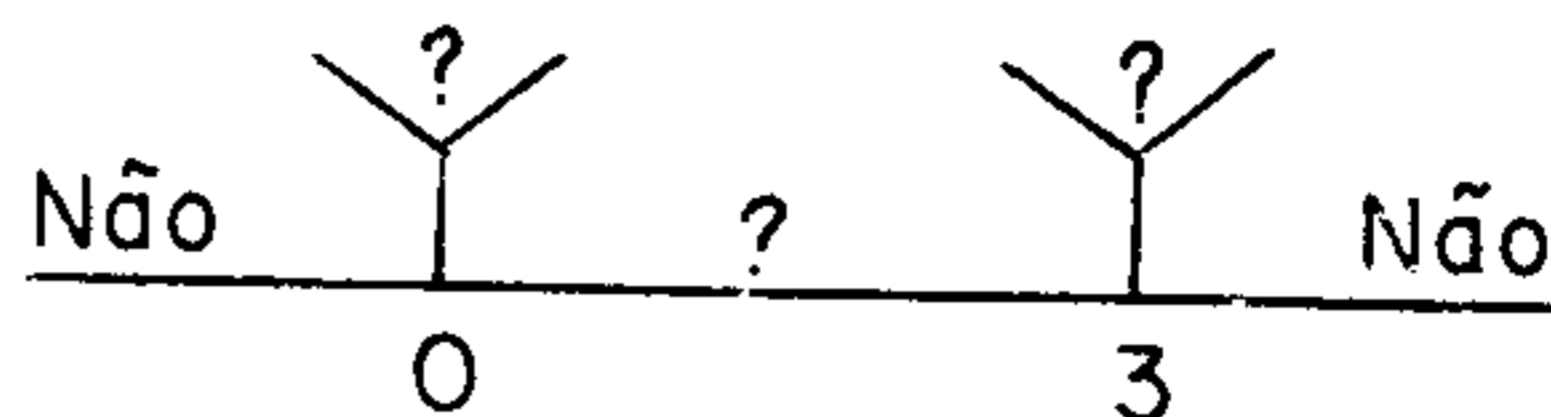
Temos, finalmente,

Não | Sim (1) | Sim | Não (2) | Não | Não (3) | Não

Resposta: $1 \leqslant x < 2$.

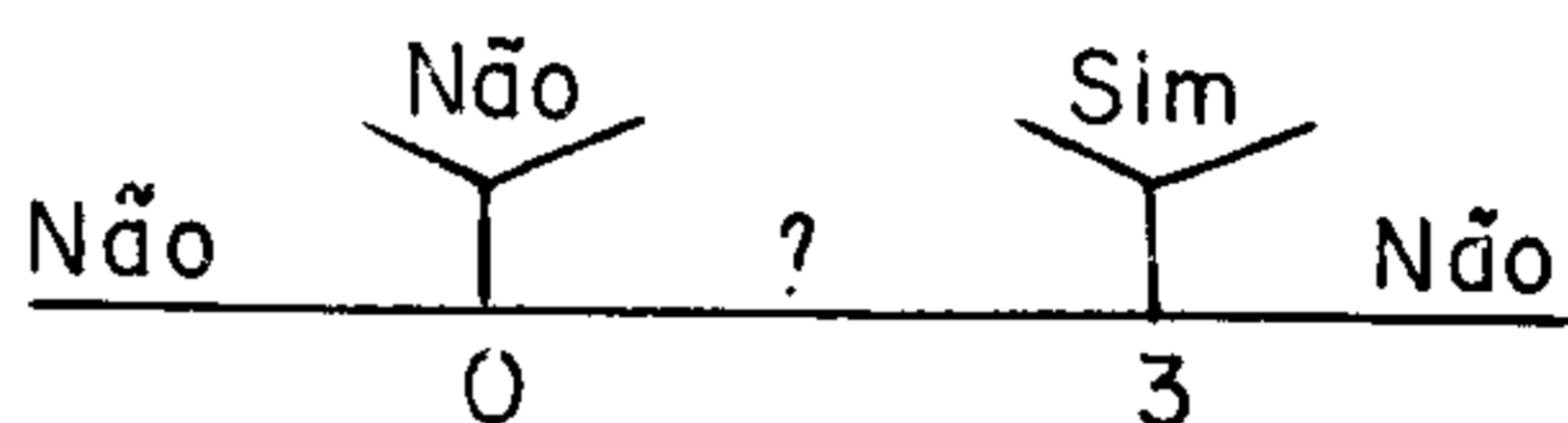
6.2) Resolva a inequação $\sqrt{x} - \sqrt{3 - x} > 1$.

Solução: O primeiro membro só é real para $x \geqslant 0$. E $3 - x \geqslant 0$, isto é, para $0 \leqslant x \leqslant 3$.

Então,

Não ? ? ? Não
0 3

Para $x = 0$ a inequação é $-\sqrt{3} > 1$. Para $x = 3$ a inequação é $\sqrt{3} > 1$.

Logo,

Não Não ? Sim Não
0 3

Para achar as soluções para $0 < x < 3$, escrevamos
$\sqrt{x} > 1 + \sqrt{3 - x}$.

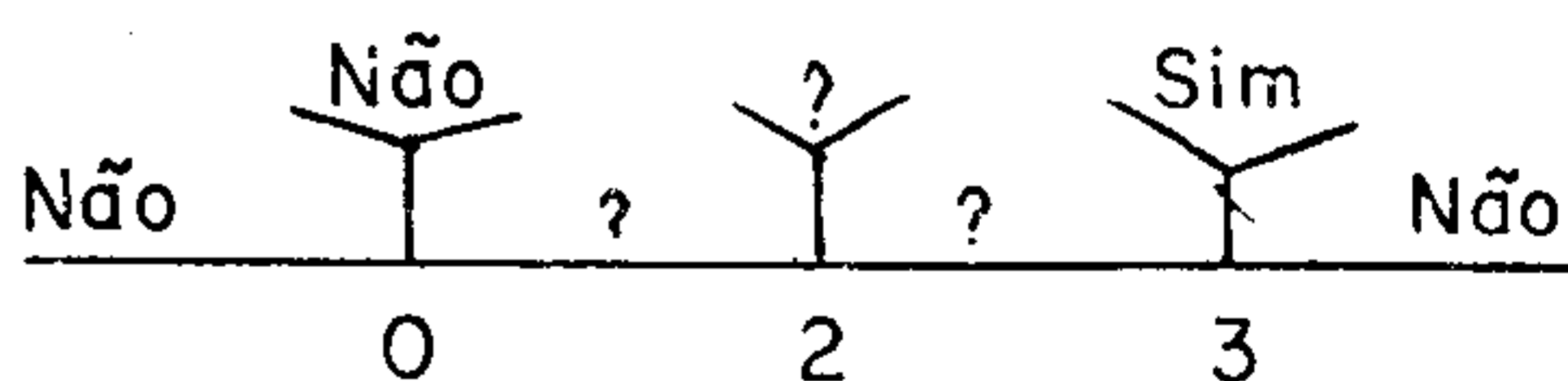
Os dois membros são obviamente positivos. Quadrando, resulta

$x > 1 + 3 - x + 2\sqrt{3 - x}$

$x - 2 > \sqrt{3 - x}$.

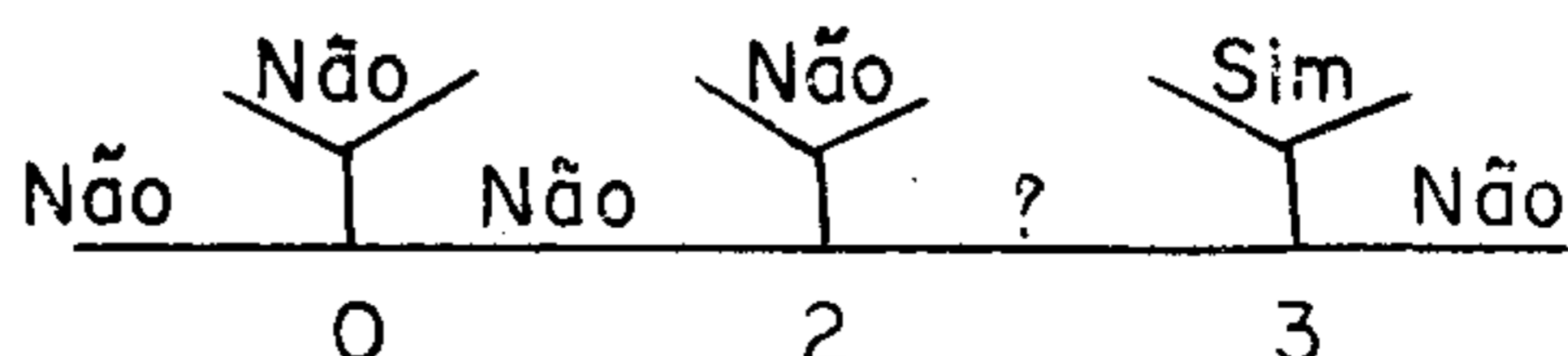
O segundo membro é positivo. O primeiro membro é positivo só se $x > 2$.

Então,

Não Não ? ? ? Sim Não
0 2 3

$x = 2$ não é solução, pois para $x = 2$ a inequação é $0 > 1$.

$x < 2$ também não é solução, pois para $x < 2$ o primeiro membro, que é negativo, não pode ser maior que o segundo, que é positivo.

Logo,

Não Não Não Não ? Sim Não
0 2 3

Para $2 < x < 3$, os dois membros são positivos; quadrando, resulta

$$x^2 - 4x + 4 > 3 - x$$

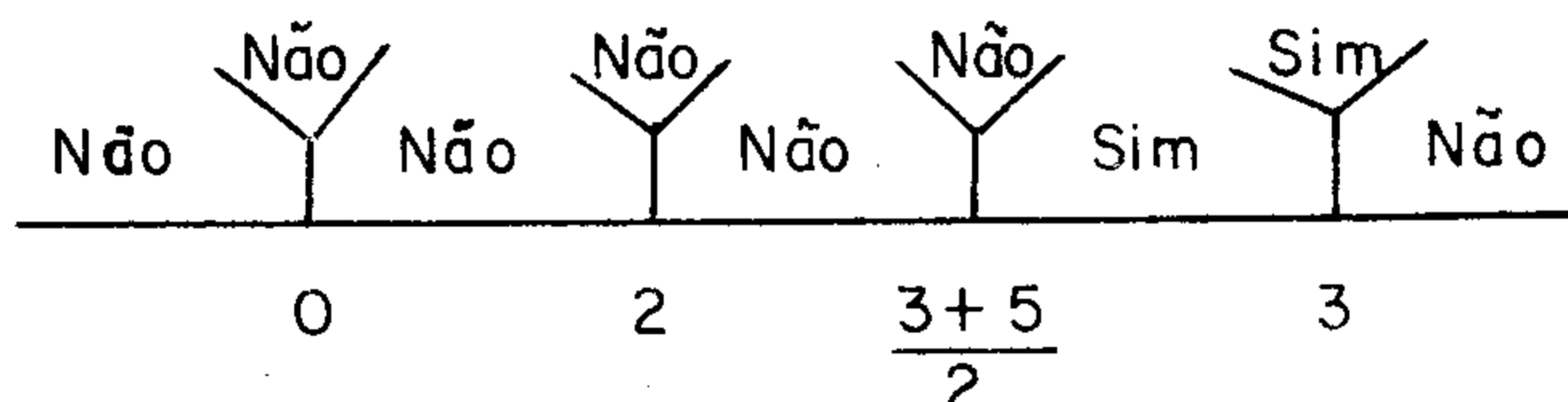
$$x^2 - 3x + 1 > 0$$

$+$	0	$-$	0	$+$
	$\frac{3 - \sqrt{5}}{2}$		$\frac{3 + \sqrt{5}}{2}$	

Logo, para $2 < x < 3$, a inequação é satisfeita se e só se

$$\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x < 3.$$

Temos, finalmente,

Não	Não	Não	Não	Não	Não	Sim	Sim	Não
	0		2		$\frac{3+5}{2}$		3	

Resposta: $\frac{3 + \sqrt{5}}{2} < x \leqslant 3$

7. MÁXIMOS E MÍNIMOS DO TRINÔMIO

Consideremos o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$. Que valores ele pode ter? Ora, L é valor do trinômio se e só se a equação $ax^2 + bx + c = L$ possui solução, mas $ax^2 + bx + c = L$ possui solução se e só se o seu discriminante for maior ou igual a zero, isto é, se e só se

$$b^2 - 4a(c - L) \geqslant 0.$$

Daí, $b^2 - 4ac + 4aL \geqslant 0$.

Ou, pondo $b^2 - 4ac = \Delta$,

$4aL \geqslant -\Delta$. Daí,

I) Então, se $a > 0$, L é valor do trinômio se e só se

$L \geqslant -\dfrac{\Delta}{4a}$, isto é,

> Quando $a > 0$, o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ possui um valor mínimo igual a $-\dfrac{\Delta}{4a}$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$

II) Então, se $a < 0$, L é valor do trinômio se e só se

$L \leqslant -\dfrac{\Delta}{4a}$, isto é,

> Quando $a < 0$, o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ possui um valor máximo igual a $\dfrac{-\Delta}{4a}$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$

III) Surge naturalmente a pergunta: para que valor de x o trinômio atingirá o seu valor extremo $\dfrac{-\Delta}{4a}$?

Ora, teremos $ax^2 + bx + c = \dfrac{-\Delta}{4a}$ se e só se

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a\left(c + \dfrac{\Delta}{4a}\right)}}{2a} =$$

$$= \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac + \Delta}}{2a} = \frac{-b \pm \sqrt{0}}{2a} =$$

$$= -\frac{b}{2a}, \text{ isto é,}$$

Em qualquer caso, o trinômio $y = ax^2 + bx + c$ assume seu valor extremo, $\frac{-\Delta}{4a}$, para $x = \frac{-b}{2a}$

Problemas:

7.1) Determine o valor máximo de $y = -x^2 + x + 1$.

Solução: Ora, o máximo existe já que $a < 0$ e vale

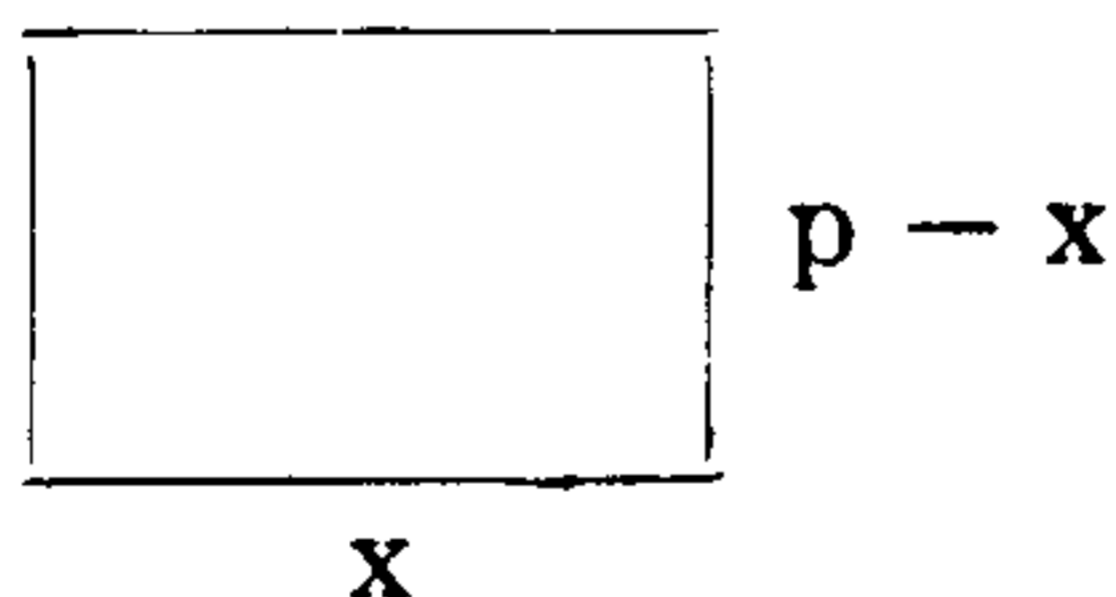
$$\frac{-\Delta}{4a} = \frac{-(1+4)}{-4} = \frac{5}{4}.$$

Resposta: $\frac{5}{4}$

7.2) Dentre todos os retângulos de perímetro 2p, qual o de área máxima?

Solução: Chamando de x uma das dimensões do retângulo, a outra é $p - x$ e a área será $S = x(p - x) = -x^2 + px$.

$p - x$

x

Ora, este trinômio assumirá seu valor máximo quando

$$x = \frac{-b}{2a} = \frac{-p}{-2} = \frac{p}{2}.$$

Então, as dimensões do retângulo serão

$$\frac{p}{2} \text{ e } p - \frac{p}{2} = \frac{p}{2}.$$

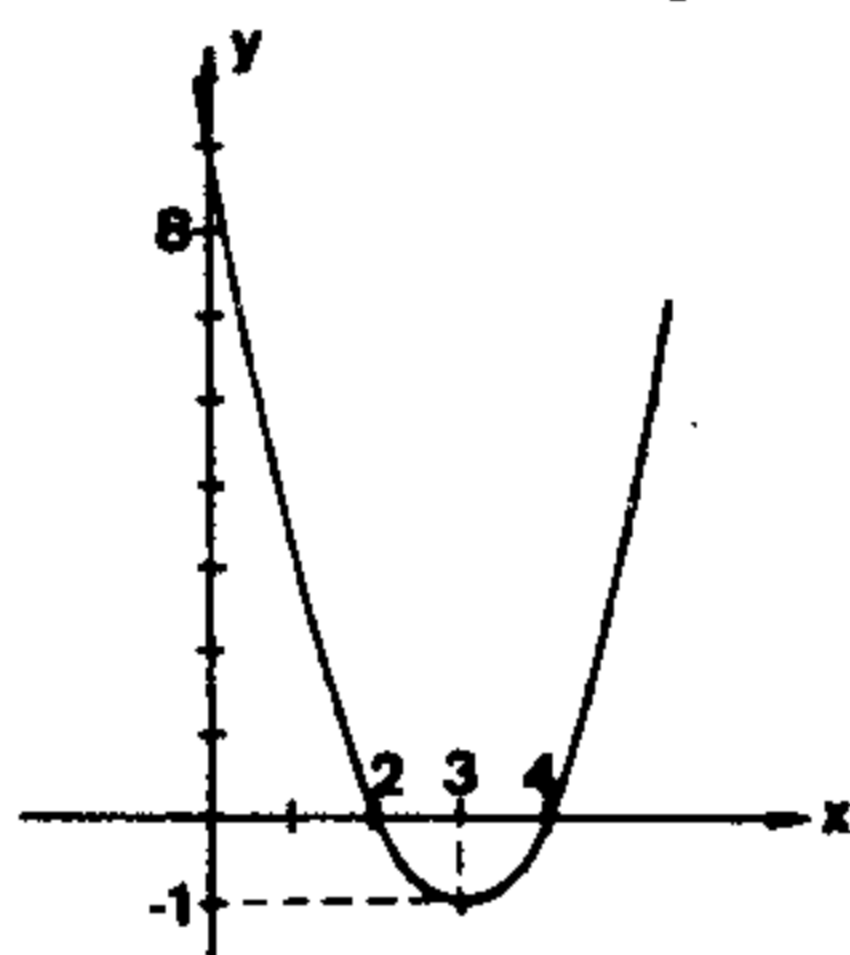
Logo, o retângulo procurado é o quadrado.

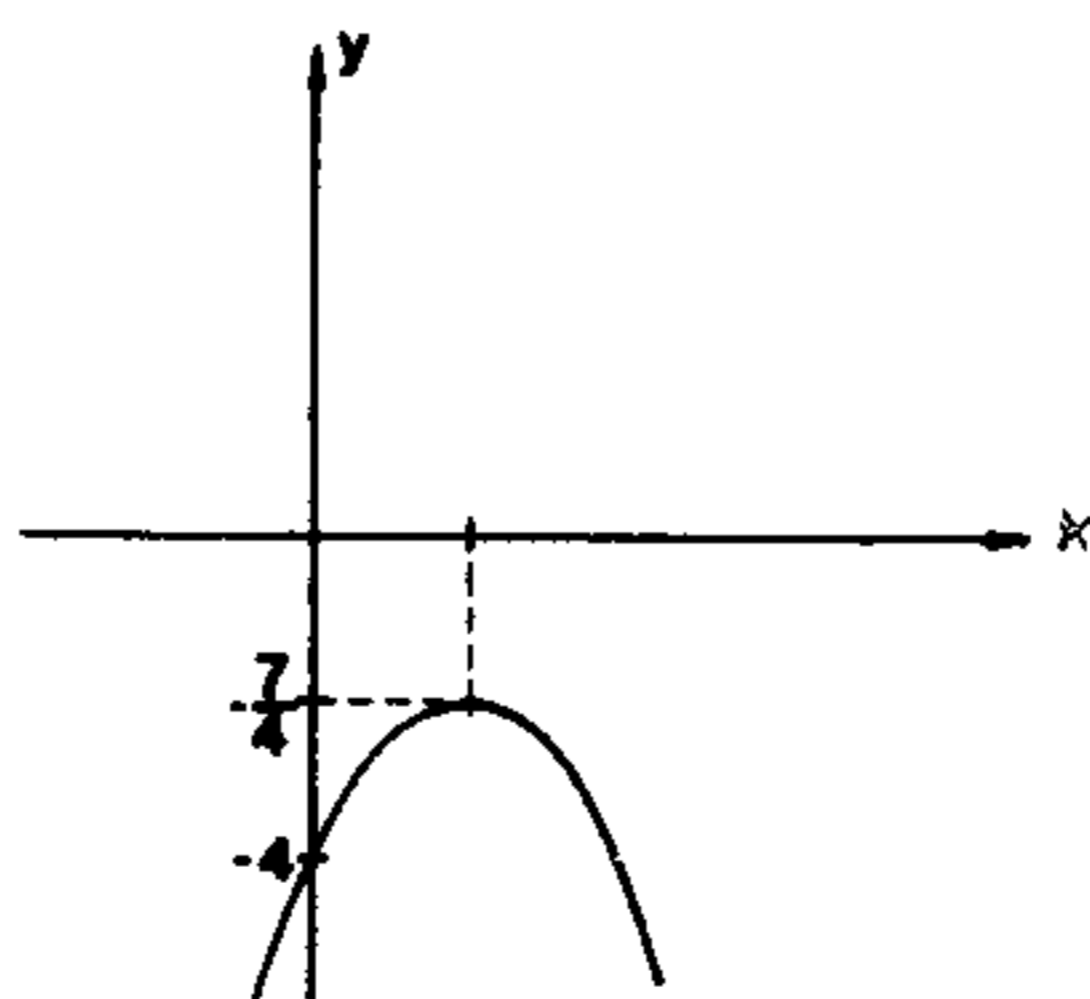
Resposta: É o quadrado.

8. GRÁFICO DO TRINÔMIO

Demonstra-se na geometria analítica que o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ é uma parábola de eixo paralelo ao eixo dos y, vértice no ponto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{-\Delta}{4a}\right)$ e com a concavidade voltada para cima se $a > 0$, e voltada para baixo se $a < 0$.

Exemplos:

8.1) O gráfico de $y = x^2 - 6x + 8$ é uma parábola de eixo paralelo ao eixo dos y, vértice em $(3, -1)$, com a concavidade voltada para cima.

É claro que os traços no eixo dos x são $x_1 = 2$ e $x_2 = 4$, que são as raízes do trinômio (pois no eixo dos x, $y = 0$). É claro também que o traço no eixo dos y é $y = 8$ (pois no eixo dos y, $x = 0$).

8.2) O gráfico de $y = -x^2 + 3x - 4$ é uma parábola de eixo paralelo ao eixo dos y, vértice em $\left(\frac{3}{2}, -\frac{7}{4}\right)$, com a concavidade voltada para baixo.

PROBLEMAS

A

1) (UFRJ-62)

   Determine as soluções inteiras da inequação $x^2 - 6x - 7 < 0$.

2) (ENCE-64)

   Determine as soluções inteiras e positivas de $x^2 - x - 56 < 0$.

3) (EN-59)

   Determine as soluções inteiras da inequação $x^2 - x - 6 < 0$.

4) (UFRJ-69)

   Determine o menor valor inteiro de x para o qual o trinômio $x^2 + 4x - 12$ é negativo.

5) Resolva as inequações

   a) (UFRJ-61) $x^2 - 1 > 0$.

   b) (UFRJ-63) $x^2 - 3x - 10 < 0$

   c) (UFJF-62) $x^2 - 10x + 21 < 0$.

   d) (IME-64) $x^2 - 2 > - x^2 + 4x + 4$.

   e) (ENCE-65) $(- 3x^2 - 10x + 8)(x^2 + 4x + 4) > 0$.

   f) (UEG-49) $(2x^2 - 10x + 12)(x - 1) > 0$.

   g) (UEG-55-2c) $\dfrac{3x^2 - 4x + 1}{x^2 + 1} > 0$

   h) (UFRJ-43) $(x^2 + x - 6)(x^2 - 4x - 5) > 0$.

i) (UFRJ-72) $(x^2 + x - 6)(-x^2 + 4x - 5) \geqslant 0$.

j) (UFRJ-70) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{-x^2 - 3x + 4} \geqslant 0$

l) (UFRJ-50) $(x^2 + x + 1)(3x - x^2 - 2) \geqslant 0$.

m) (UM-60) $\dfrac{2 + 7x - 15x^2}{5 - x + 6x^2} \geqslant 0$.

n) (ENCE-63) $\dfrac{x^2 - x - 6}{-x^2 + 5x - 4} > 0$

o) (UFRJ-62) $\dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 + 3x + 2} < 0$

p) (UFRJ-63) $\dfrac{x^2 - x - 2}{x^2 - x - 6} < 0$

q) (UFRJ-62) $\dfrac{-x^2 - x - 2}{x^2 - 4x - 3} < 0$

r) (UFRJ-61) $\dfrac{x^2 + 2x - 3}{2x^2 - 8} < 0$

s) (UFF-57) $(x^2 - 4)(x + 2) < 0$

t) (ENCE-69-2c) $\dfrac{2x^2 - 4x + 7}{x^2 - 5x + 6} > -1$

u) (UFRJ-56) $\dfrac{16x^2 + 16x + 4}{9x^2 + 9x - 54} > 1$

v) (ENCE-71) $x + \dfrac{4}{x} \leqslant 5$

x) (UFMG-66) $5 + 4x - x^2 \geqslant 0$.

6) Estude a variação de sinal de

a) (UFB-UFRJ-60) $2x^2 + 2x - 12$

b) (UFRJ-69) $(x^2 - 5x + 4)(2x^2 + 2x - 12)$

c) (UFF-58) $\dfrac{x^2 - x + 1}{x^2 - 4x + 4}$

d) (UFRJ-58) $\dfrac{x^2 - 4x + 3}{x^2 - x - 2}.$

7) (UFRJ-69-2c) (UGF-70)

A solução de $x^2 + x - 2 < 0$ é

a) $x < 2$ b) $-2 < x < 1$ c) $x < -2$ ou $x > 1$

d) $x > 2$ ou $x < -1$ e) $-1 < x < 2$ f) $x > 1$

8) (CM-73)

Os valores de x que tornam $x^2 + 8x + 7 > 0$ são

a) $-1 < x < 1$ b) $1 \leqslant x \leqslant 7$ c) $-7 < x < -1$

d) $1 \leqslant x < 7$ e) NRA

9) (EESC-64)

Verifique se existem números inteiros positivos x tais que

$$\frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 3x - 28} \leqslant 0.$$

10) (UFRJ-67)

Determine a menor solução inteira de

$$\frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 + 4x - 12} < 0.$$

11) (COMCITEC-72)

Uma condição necessária e suficiente para que o número real x satisfaça à inequação

$$\frac{x^2 - 9}{x^2 - 16} < 0 \quad \text{é:}$$

a) $x < -3$ b) $-3 < x < 4$

c) $-4 < x < -3$ ou $3 < x < 4$.

d) Que x seja um número real qualquer.

e) Que x seja racional.

12) (CM-72)

O conjunto dos valores de x para os quais $6x - x^2 > 0$ é:

a) $(-6,0)$ b) $(-\infty, \infty)$ c) $(0,6)$

d) $(-\infty,0) \cup (6,\infty)$ e) NRA

13) (COMCITEC-72)

O subconjunto de $\mathbb{R}$ no qual os valores da função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ $y = (3x - 6)(x^2 - 2x - 3)$ são estritamente positivos é:

a) vazio b) $(-\infty,1) \cup (2, 3)$ c) $[-1,2] \cup [3,\infty)$

d) $(-\infty, -1] \cup [2, 3]$ e) $(-1,2) \cup (3,\infty)$.

14) (UGF-70)

O trinômio $36x^2 + 60x + 25$

a) é sempre positivo

b) é sempre negativo

c) é positivo para $\frac{25}{36} < x < \frac{60}{36}$

d) é negativo para $\frac{25}{36} < x < \frac{60}{36}$

e) NRA.

15) (COMSART-73)

As soluções da inequação $\frac{x + 1}{x^2 - 3x + 2} \geqslant 0$ são:

a) $-1 \leqslant x < 1$ ou $x > 2$ b) $-1 \leqslant x \leqslant 1$ ou $x \geqslant 2$

c) $x \leqslant -1$ e $x \geqslant 2$ d) $x \leqslant 1$ e $x > 2$

e) NRA

16) (COMCITEC-73)

Dada a inequação $(3x - 2)^3 (x - 5)^2 (2 - x) x > 0$, sua solução é:

a) $\left\{ x \mid x < \frac{2}{3} \text{ ou } 2 < x < 5 \right\}$

b) $\left\{ x \mid \frac{2}{3} < x < 2 \text{ ou } x < 0 \right\}$

c) $\left\{ x \mid \frac{2}{3} \leqslant x \leqslant 2 \right\}$

d) $\left\{ x \mid \frac{2}{3} < x < 5 \right\}$

e) NRA

17) (COMCITEC-73) (SEG-67)

A função $P(x) = |x^2 + x - 1|$ é estritamente menor que 1 para os valores de x em:

a) $[-2, -1] \cup [0,1]$ b) $(-2, -1) \cup (0,1)$

c) $[-2, -1] \cup (0,1)$ d) $(-2, -1) \cup [0,1]$

e) $[-2, 1]$.

18) (EESC-58-2c)

Sendo $f(x) = \frac{x}{1 + x^2}$, determine x para que

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \leqslant f(x) \leqslant \frac{1}{2}.$$

19) (ITA-54)

Resolva o sistema de inequações

$$\begin{cases} x^2 + x - 2 > 0 \\ 2x^2 - x - 1 < 0 \end{cases}$$

20) (UFRJ-69-2c)

Resolva o sistema de inequações

$$\begin{cases} 5x^2 - 25x > 0 \\ 9x^2 + 27x > 0 \end{cases}$$

a) $x > 3$ b) $x > 0$ c) $x > -3$ d) $x < 5$
e) $x < 5$ ou $x > -3$ f) $x > 5$ ou $x < -3$

21) (UFB-60)

Resolva o sistema de inequações

$$\begin{cases} 2x^2 - 32 < 0 \\ 9 - x^2 < 0 \end{cases}$$

22) (UFRJ-66)

Simplifique $\dfrac{x^2 - 7x + 12}{x^2 - 8x + 15}$.

23) (UFRJ-48)
Simplifique

$$\frac{(x^2 - 3x)^2 (x + 2x^2 + 1) (x^2 - 3x + 2)}{(x^4 - 1) (x^3 - 5x^2 + 6x)^2}$$

24) (UFMG-60)

Fatore $d^2 - 11d + 10$

25) (UFRJ-71)

Fatore $2x^2 + 7x - 15$

26) (FIB-72)

Fatore $2x^2 - 3x - 5$

a) $(x - 1)(2x - 5)$ b) $(x + 1)(2x - 5)$
c) $(x + 1)(2x + 5)$ d) $(x - 1)(2x + 5)$
e) $(x + 1)(x - 5)$

27) (UFRJ-69)

Determine a forma canônica de $y = 3x^2 - x + 2$

28) (PUC-57)

Para que valores de m a equação $x^2 + (m - 1)x + (3m - 4) = 0$ não tem raízes reais?

29) (CESCEM-68)

Quais os valores de x que satisfazem à inequação

$$\frac{x^2 - 2}{x} \leqslant 1?$$

a) $x \leqslant -1$ ou $0 < x \leqslant 2$ b) $-1 \leqslant x \leqslant 2$ e $x \neq 0$

c) $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 2$ d) qualquer valor de x diferente de zero e) nenhum valor de x.

30) (CESCEM-69)

A solução do sistema de inequações

$$\begin{cases} x^2 - 1 \geqslant 0 \\ x^2 - x < 0 \end{cases}$$ é:

a) $x = 1$ b) $0 < x < 1$ c) $|x| \geqslant 1$ d) $0 < x \leqslant 1$

e) NRA

31) (CESCEM-68)

A solução do sistema de inequações

$$\begin{cases} 2x^2 + 8 \geqslant x^2 - 6x \\ x + 5 < 0 \end{cases}$$

é:

a) $0 < x < 5$ b) $-5 < x \leqslant -4$ c) $-4 \leqslant x \leqslant -2$

d) $x \leqslant -2$ e) $x < -5$

32) (USP-66)

A solução geral da dupla desigualdade

$-2 < x^2 - 3 < \frac{1}{5}$ é:

a) $1 < |x| < \frac{4}{\sqrt{5}}$ b) $\frac{-4}{\sqrt{5}} < x < -1$

c) $1 < x < \frac{4}{\sqrt{5}}$ d) Não há solução e) $1 < x < \frac{16}{5}$

33) (CESCEM-67)

O conjunto dos valores de x que satisfazem o sistema de inequações $x^2 - 4x + 3 > 0$ e $x^2 - 2x < 0$ é:

a) $0 < x < 1$ b) $\{1, 3\}$ c) $x < 0$ ou $x > 3$

d) $2 < x < 3$ e) Não existe nenhum valor de x nestas condições.

34) (CESCEA-69)

A solução da inequação $(x - 3)(-x^2 + 3x + 10) < 0$ é:

a) $-2 < x < 3$ ou $x > 5$ b) $3 < x < 5$ ou $x < -2$

c) $-2 < x < 5$ d) $x > 6$ e) $x < 3$.

35) (UC-67)

A solução da inequação $(x^2 - 4)(5x^2 + x + 4) \geqslant 0$ é:

a) $x \geqslant 0$ b) Qualquer número real c) $-2 \leqslant x \leqslant 2$

d) $x \leqslant -2$ ou $x \geqslant 2$. e) $1 \leqslant x \leqslant 2$.

36) (USP-67)

Seja A o conjunto dos números inteiros estritamente positivos que satisfazem a inequação $(3x - 3)(2x - 5) < (5 - 2x)^2$, então

a) A é vazio b) $a = \left\{-2; \frac{5}{2}\right\}$ c) $A = \{-1; 1\}$

d) $A = \{1; 2\}$ e) NRA

37) (CESCEM-67)

O conjunto dos valores de x que satisfazem a inequação $x^2 - 2\sqrt{2}x + 2 \leqslant 0$ é:

a) $-\sqrt{2} < x < \sqrt{2}$ b) $x = \sqrt{2}$ c) $|x| = \sqrt{2}$

d) $|x| \geqslant \sqrt{2}$ e) Qualquer valor de x

38) (CESCEA-68)

Se $x^2 - 4x - 7 < 0$, então

a) $2 - \sqrt{11} < x < 2 + \sqrt{11}$ b) $0 < x < \sqrt{11}$

c) $2 - \sqrt{11} < x < 2$ d) $x < 2 - \sqrt{11}$ ou $x > 2 + \sqrt{11}$

e) $x < 0$.

39) (USP-69)

Para qual dos seguintes conjuntos de valores de m o polinômio $P(x) = mx^2 + 2(m - 2)x + m^2$ é negativo quando $x = 1$?

a) $1 < m < 2$ b) $-1 < m < 2$ c) $-5 < m < -4$

d) $-3 < m < 2$ e) $0 < m < 1$.

40) (ITA-65)

O trinômio $-x^2 + 3x - 4$

a) É positivo para todo número real x

b) É negativo para todo número real x

c) Muda de sinal quando x percorre o conjunto de todos os números reais.

41) (CESCEA-69)

Seja $f(x) = \sqrt{-x^2 + 5x + 14} + \sqrt{5 - x}$. O conjunto de todos os x para os quais f (x) é um número real é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid -7 \leqslant x \leqslant 5\}$

b) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 7\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid -2 \leqslant x \leqslant 5\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 5\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leqslant -2 \text{ ou } x \geqslant 7\}$

42) (ENCE-69)

Resolva a inequação $\sqrt{x-1} + 2 > 0$.

43) (PUC-63)

Determine as coordenadas do vértice da parábola representativa do trinômio $y = 3x^2 + 5x - 9$.

44) (UFF-68) (UFRJ-68)

O trinômio $x^2 + px + q$ tem uma raiz nula e um mínimo para $x = 3$. Então

a) $p = 0$ e $q = 1$ b) $p = 0$ e $q = -6$
c) $p = -6$ e $q = 0$ d) $p = 1$ e $q = 0$
e) $p = 0$ e $q = 0$ f) $p = 2$ e $q = 1$

45) (UEG-64)

Calcule m de modo que o máximo de $y = x^2 - 2mx - 5$ seja o quádruplo do valor correspondente de x.

46) (UFF-58)

Determine as coordenadas do vértice da parábola representativa do trinômio $y = ax^2 + bx + c$.

47) (PUC-57)

Complete:

O trinômio $ax^2 + 3x + 9$ tem máximo igual a........ para x igual a........ se o coeficiente a for........

48) (UEG-64)

Qual é o valor máximo de $y = 3 + 2x - x^2$?

49) (UFRJ-66)

Determine a para que o trinômio $ax^2 - 3x + 2a$ apresente máximo e duas raízes reais iguais.

50) (UFRRJ-69)

O gráfico do trinômio do segundo grau $y = ax^2 + bx + c$ é:

a) Uma elipse
b) Uma parábola
c) Um círculo
d) Uma ciclóide
e) Uma hipérbole.

51) (UGF-70)

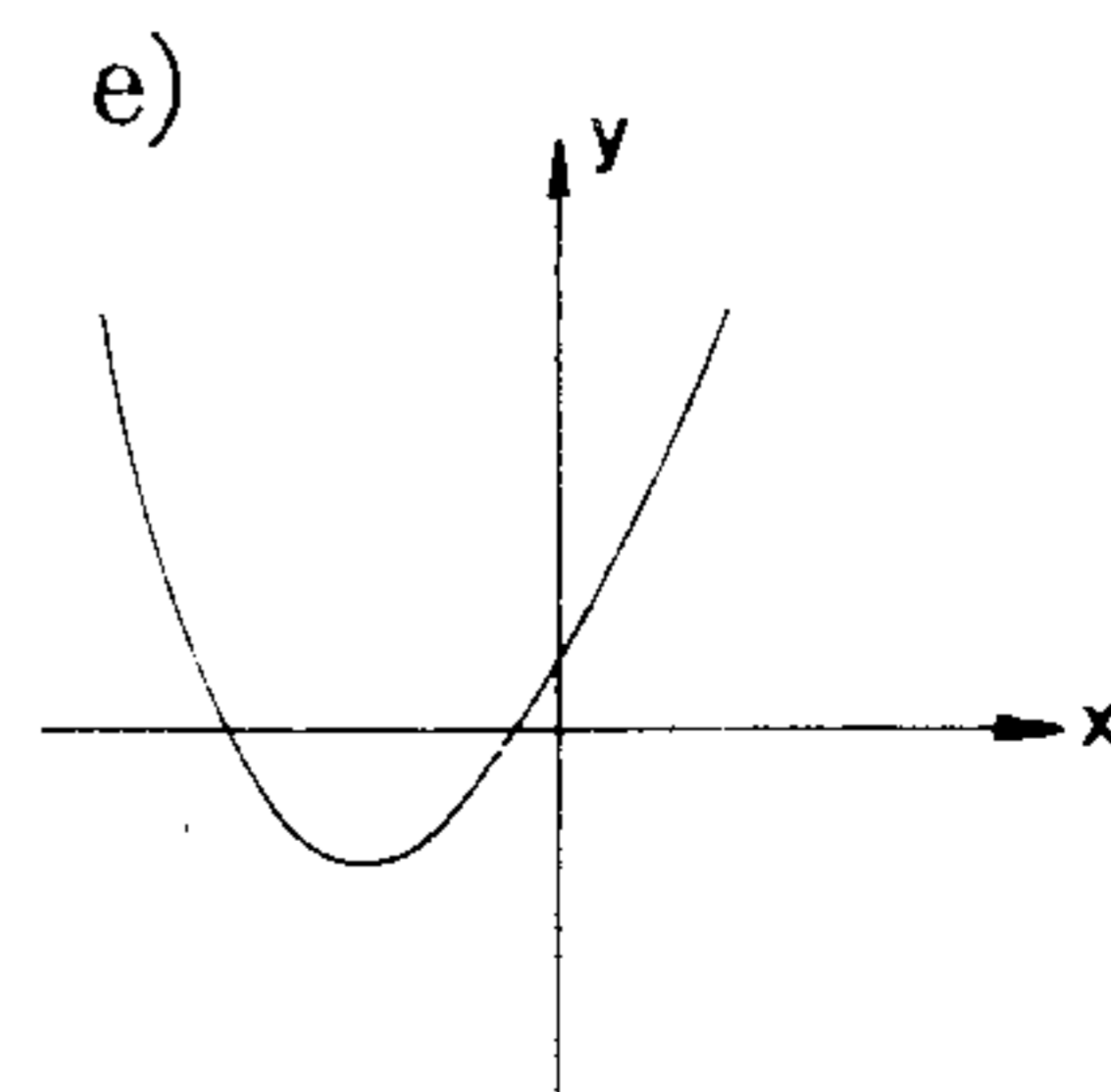
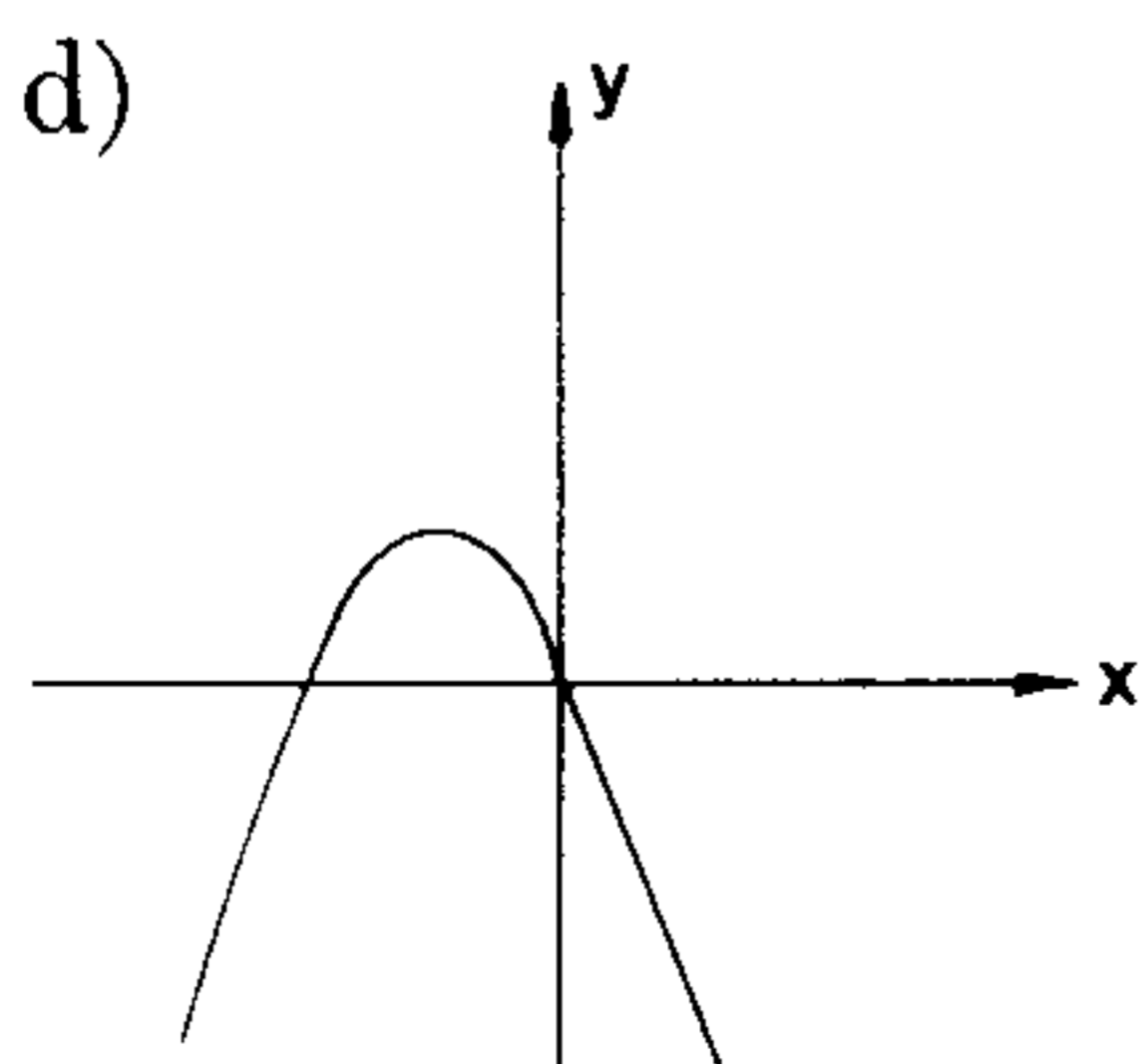
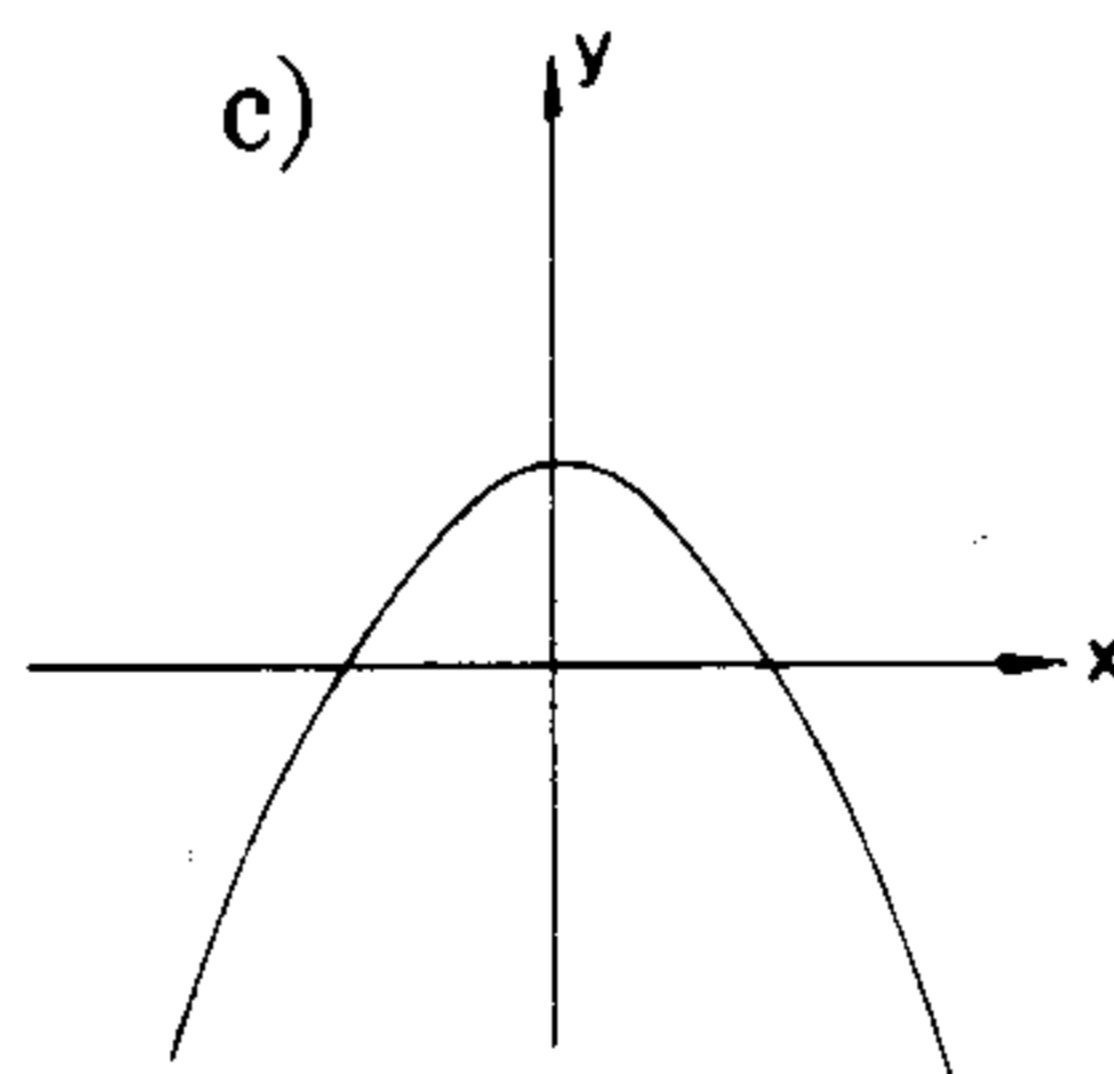
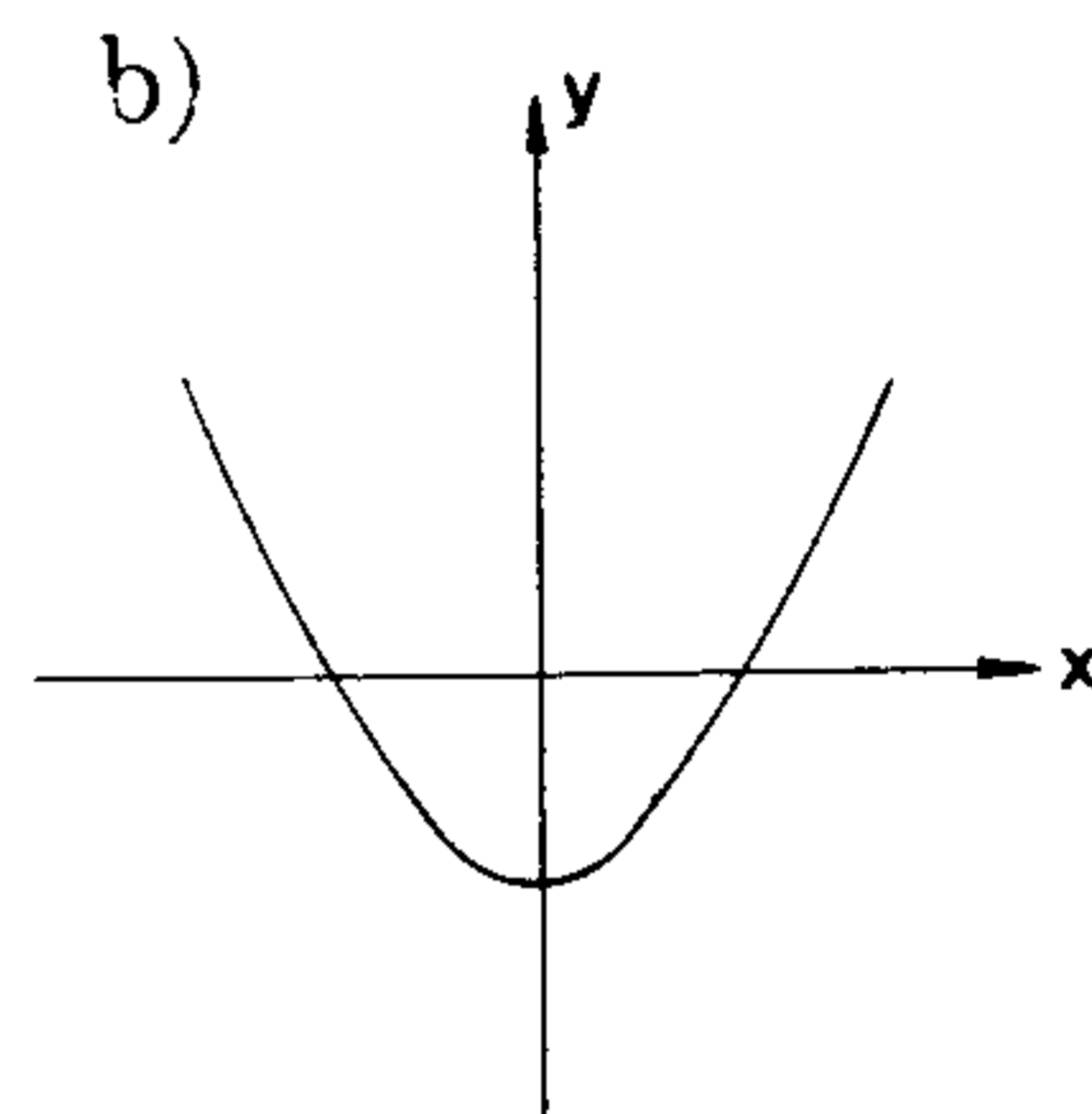
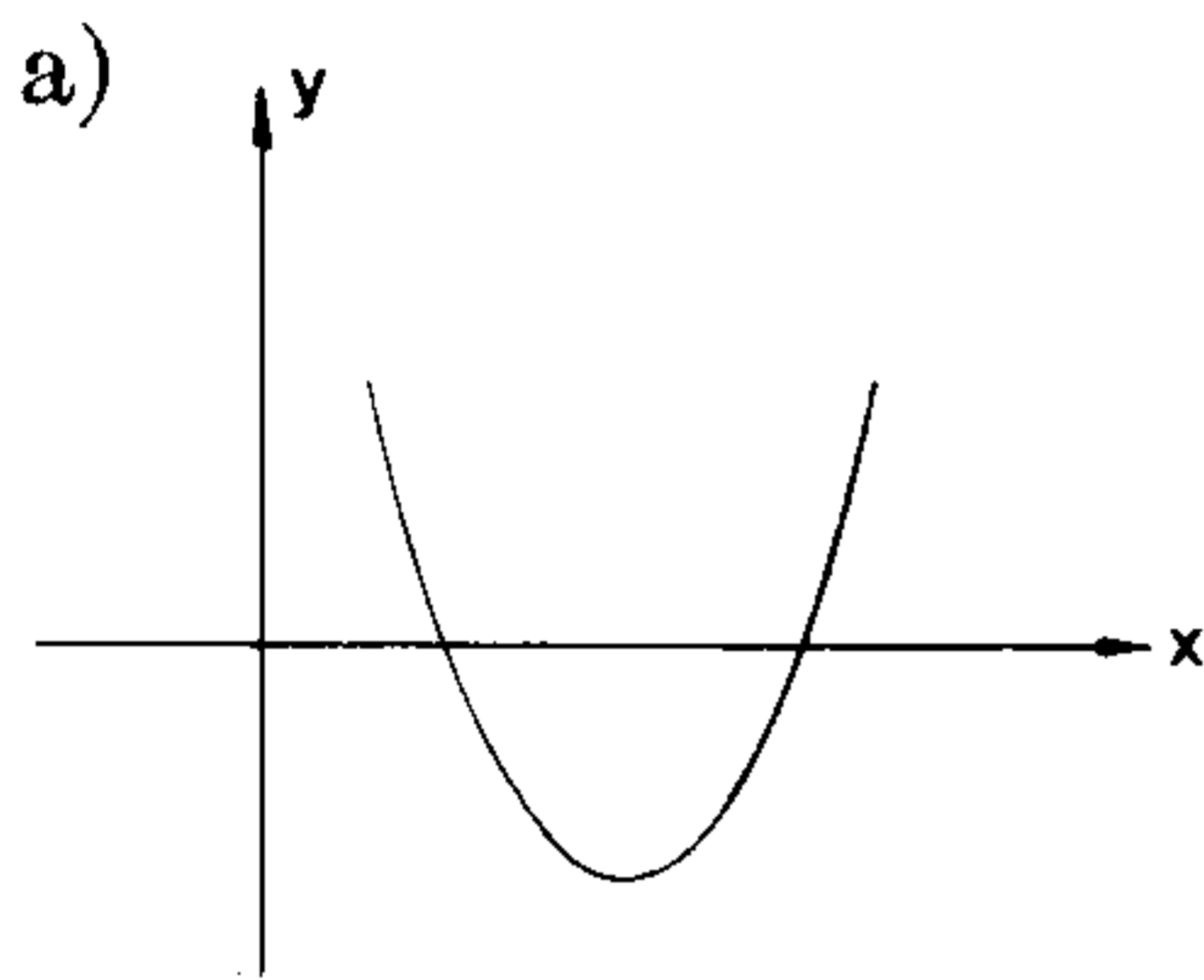
O gráfico do trinômio $y = x^2 - 2x - 3$ é:

a)
y
x

b)
y
x

c)
y
x

d)
y
x

e)
y
x

52) (UFRRJ-54-2c)

Faça o gráfico de $y = x^2 + 7x + 10$

53) (CICE-67)

Determine o polinômio P (x), do segundo grau, tal que $P(-1) = 1$, $P(1) = 2$ e $P(2) = 3$.

54) (PUC-58)

Um trinômio do segundo grau assume os valores 1, 3 e -5 para $x = 1$, $x = 2$ e $x = -1$, respectivamente. Escreva esse trinômio e calcule o máximo ou mínimo que ele possua.

55) (EN-57)

Dado o trinômio $9x^2 - 6x + m - 3$, determine m para que:

I) O trinômio tenha sempre o mesmo sinal.

II) O número 1 fique compreendido entre as raízes.

56) (UFRJ-64)

Determine m para que $3x^2 - mx + 3$ seja sempre positivo.

57) (PUCSP-66)

O valor numérico de um trinômio de segundo grau é positivo ou nulo para qualquer valor da variável. O discriminante desse trinômio é:

a) zero b) $\geqslant 0$ c) > 0 d) < 0 e) NRA

58) (EEL-68)

Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$. Se existir um número y tal que $af(y) < 0$, então, o trinômio $ax^2 + bx + c$ tem sempre

a) 3 raízes iguais

b) 2 raízes distintas

c) Nenhuma raiz

d) NRA

59) (PUCSP-70)

O valor máximo da função $y = ax^2 + bx + c$ com $a \neq 0$ é:

a) $-\frac{\Delta}{4a}$ se $a < 0$ $(\Delta = b^2 - 4ac)$

b) $-\frac{b}{2a}$ se $a > 0$ c) $b^2 - 4ac$ se $a > 0$

d) $b^2 - 4ac$ se $a < 0$ e) NRA

60) (UC-67)

Seja dado o trinômio do segundo grau $y = -3x^2 + 2x + 1$.

a) Ele não tem máximo, nem mínimo.

b) $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$ são as coordenadas do ponto de mínimo.

c) (0, 1) são as coordenadas do ponto de mínimo.

d) $\frac{-1}{3}$ é o ponto de máximo e 1 é o ponto de mínimo.

e) NRA.

61) (USP-64)

Faça o gráfico do trinômio $y = x^2 - 6x + 5$.

62) As raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ são r e s.

A equação cujas raízes são $ar + b$ e $as + b$ é:

a) $x^2 - bx - ac = 0$

b) $x^2 - bx + ac = 0$

c) $x^2 + 3bx + ca + 2b^2 = 0$

d) $x^2 + 3bx - ca + 2b^2 = 0$

e) $x^2 + bx(2 - a) + a^2 c + b^2 (a + 1) = 0$

63) Determine o mínimo valor de $x^2 + y^2$ sabendo que $x + 2y = 5$.

64) Seja $y = (x - a)^2 + (x - b)^2$, a e b constantes. Para que valor de x, y é mínimo?

a) $\frac{a + b}{2}$ b) $a + b$ c) $\sqrt{ab}$ d) $\sqrt{\frac{a^2 + b^2}{2}}$

e) $\frac{a + b}{2ab}$

65) A solução de $x^2 (x^2 - 1) \geqslant 0$ é:

a) $x \geqslant 1$ b) $-1 \leqslant x \leqslant 1$ c) $p\, x \in \{-1, 0, 1\}$

d) $x = 0, x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 1$ e) $x \geqslant 0$.

66) O vértice da parábola $y = x^2 - 8x + c$ pertence ao eixo dos x. O valor de c é:

a) -16 b) -4 c) 4 d) 8 e) 16

PROBLEMAS

B

1) (UFJF-67)

Resolva a inequação $x^3 - x^2 + x - 1 < 0$

2) (ITA-67)

Seja $y = [ax^2 - 2bx - (a + 2b)]^{1/2}$

Em qual dos casos abaixo y é real e diferente de zero?

a) $a > 0, \quad b > 0, \quad -1 < x < \frac{a+b}{a}$

b) $a > 0, \quad b < 0, \quad x = \frac{a+2b}{a}$

c) $a > 0, \quad b = 0, \quad -1 < x < 1$

d) $a < 0, \quad b = 3a, \quad x < -1$

e) $a < 0, \quad b = 2a, \quad -1 < x < \frac{a+b}{a}$

3) (ITA-67)

Em qual dos casos abaixo, vale a desigualdade

$$\frac{x^2 - ax - 2a^2}{x^2 - (a + 2)x + 2a} < 0?$$

a) $a < 0, \quad x < 2a$

b) $a = 0, \quad x > -a$

c) $a > 2, \quad 2 < x < a$

d) $a > 2, \quad -a < x < 2$

e) $a > 2, \quad x > 2a.$

4) (EESC-57)

Resolva a inequação $x - 5 < \sqrt{x^2 + 25}$

5) (EESC-57-2c)

Resolva a inequação $x - 2 < \sqrt{x - 2}$

6) (EESC-59)

Resolva a inequação $\sqrt{x - 1} < \frac{x}{\sqrt{x + 1}}$

7) (EN-70)

A solução de $\sqrt{x^2 - 6x + 8} < 8 - 3x$ é:

a) $x \leqslant 2$ b) $x > 4$ c) $x < \frac{8}{3}$ d) $2 < x < \frac{8}{3}$

e) NRA

8) (UFRJ-61)

Resolva a inequação $\sqrt{2(x - 1)} < x$

9) (EN-72)

A solução de $2\sqrt{x} - \sqrt{1 - x} \geqslant 2$ é:

a) $0 \leqslant x \leqslant 1$ b) Não existe x que satisfaça a inequação.

c) $x = 1$ d) $x \geqslant 1$ e) NRA

10) (EN-73)

$\sqrt{2 + x} > 1 - \sqrt{x + 6}$ se e só se

a) $x \geqslant -2$ b) $x \leqslant 6$ c) $-2 \leqslant x \leqslant 6$

d) $x < \frac{1}{4}$ e) NRA

11) (CICE-70)

O maior valor de $x^2 - |x| + 1$ no intervalo $[-3,3]$ é:

a) 2 b) − 3 c) 0 d) 6 e) 7.

12) (COMCITEC-72)

Uma condição necessária e suficiente para que o número real x satisfaça a inequação $|x^2 - 1| < x$ é:

a) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$

b) $1 < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ c) $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} < x < 1$

d) $\frac{\sqrt{5} - 1}{2} < x < \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ e) $0 < x$

13) (EN-73)

A condição necessária e suficiente para que $|x^2 - 1| < x + |x|$ é que:

a) $x \geqslant 1$ b) $\sqrt{2} - 1 < x < \sqrt{2} + 1$

c) $1 \leqslant x < \sqrt{2} + 1$ d) $x > \sqrt{2} - 1$ e) NRA

14) (UFF-70-2c)

Sendo $y = x^2 + 1$, calcule o maior valor de δ tal que $|x - 1| < \delta \Rightarrow |y - 2| < 1$.

15) (CICE-70-2c)

Considere a função $f(x) = ax^2 + bx + c$ e sejam $I = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leqslant ax^2 + bx + c\}$ e $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geqslant ax^2 + bx + c\}$.

Entre as afirmações:

I) $(0, 0) \in I$ se e somente se $c > 0$

II) Se $b^2 - 4ac < 0$ e $c > 0$, então, $(0, 0) \in S$

III) Se $a > 0$, $(0, 0) \in S$ se e somente se $b^2 - 4ac > 0$.

IV) Se $a > 0$ e $c < 0$, então, $(0, 0) \in S$.

V) Se $b^2 - 4ac < 0$ e $p = (x, 0)$, então, p nunca pertence a I e a S simultaneamente.

Tem-se:

a) I e V são falsas.
b) II e IV são falsas.
c) Somente IV e V são corretas.
d) Somente I e III são falsas.
e) Somente III e IV são corretas.

16) (COMSART-73)

A expressão $\frac{1}{x^2 + 2x + 1} + \frac{3x - 3}{x^2 - 1} - \frac{2x - 4}{x^2 + 3x + 2}$ é equivalente a:

a) $\frac{x + 2}{(x + 1)^2}$ b) x c) $\frac{1}{x^2 + 2x + 1}$

d) $\frac{x - 2}{(x + 1)^2}$ e) NRA

17) (ITA-66)

$\sqrt{-2kx^2 - 3kx + 2k}$ tem valor real para:

a) $k > 0,\ x < -2$ ou $x > \frac{1}{2}$

b) $k > 0,\ -1 < x < \frac{1}{3}$ c) $k < 0,\ -2 < x < \frac{1}{2}$

18) (USP-56)

As medidas dos lados de um triângulo são $x^2 + x + 1$, $2x + 1$ e $x^2 - 1$ $(x > 1)$. Determine o maior lado e prove que o triângulo tem um ângulo de 120°.

19) (IME-51)

Determine os valores possíveis da razão $\frac{p}{h}$, onde p e h são positivos, de modo que $\sqrt{p^2 - 2ph - h^2}$ seja real.

20) (EESC-59-2c)

Prove que $\sqrt{x} + \sqrt{1 - x} \leqslant \sqrt{2}$ usando a desigualdade $(u + v)^2 + (u - v)^2 = 2(u^2 + v^2)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$.

21) (USP-65)

Sendo a a hipotenusa e b e c os catetos de um triângulo retângulo, a equação $a^2x^2 - b^2x - c^2 = 0$

a) Tem uma raiz igual a -1 e a outra entre 0 e 1.
b) Tem raízes imaginárias.
c) Tem uma raiz igual a 1 e a outra entre 0 e -1.
d) Não admite raízes racionais.
e) NRA.

22) Sejam a e b dois números positivos distintos. Sejam A, G, H suas médias aritmética, geométrica e harmônica, respectivamente. Podemos afirmar que:

a) $H < G < A$ b) $G < H < A$ c) $G < A < H$
d) $H < A < G$ e) NRA.

23) (COMSART-73)

O conjunto dos valores de p para os quais a inequação $x^2 + 2x + p > 10$ é verdadeira para qualquer x real é dado por:

a) $p > -9$ b) $p < 11$ c) $p > 11$
d) $p < -9$ e) NRA.

24) (CESCEA-73)

Se $\frac{x - a}{x^2 + 1} < \frac{x + a}{x^2}$ para todo $x \neq 0$, então

a) $a < -\frac{\sqrt{2}}{2}$ b) $a > \frac{\sqrt{2}}{4}$ c) $-\frac{\sqrt{2}}{4} < a < \frac{\sqrt{2}}{4}$

25) (SM-68)

Dado o trinômio do segundo grau

$y = kx^2 + (k - 1)x + (k - 1)$

a) Não há nenhum valor de k que torne o trinômio negativo para qualquer valor de x.

b) O trinômio é negativo para qualquer valor de x se $\frac{-1}{3} < k < 1$.

c) $k > 3$ torna sempre nulo o trinômio.

d) Para que o trinômio seja sempre negativo só convirão os valores de $k < \frac{-1}{3}$

26) (EN-57-2c)

Calcule m para que a inequação $(m-3)x^2 + 4x + m < 0$ seja válida para todos os valores de x, com exceção de um só.

27) (ENCE-70)

Determine m para que se tenha sempre

$$\frac{(m + 3)x^2 + (m + 3)x + 19}{x^2 + x + 6} > 0.$$

28) (UFRJ-55)

Determine m de modo que a desigualdade $x^2-(8m-2)x + 15m^2 - 2m - 7 > 0$ seja satisfeita para qualquer valor de x.

29) (CESCEA-68)

Considere o trinômio $y = x^2 + (2a - 1)x + a^2$. Assinale dentre as condições abaixo a que torna o trinômio sempre positivo.

a) $a > 0$ b) $a < \frac{1}{2}$ c) $a < \frac{-1}{4}$ d) $a > \frac{-1}{2}$ e) $a > \frac{1}{4}$

30) (EESC-69)

O trinômio $kx^2 + 2(k + 1)x - (k + 1)$

a) É negativo para todo valor de x e todo $k \neq 0$.

b) É negativo para todo valor de x se $k \leqslant -2$.

c) É positivo para todo valor de x e todo $k \neq 0$.

d) É negativo para todo valor de x se $-1 < k < \frac{-1}{2}$

e) NRA.

31) (EESC-66)

A inequação $x^2 + (m - 2)x + (m^2 - m + 4) > 0$ é satisfeita qualquer que seja x:

a) Só para $m > 2$ e $m < -2$.

b) Só para $-2 < m < 2$.

c) Só para $m = \pm 2$.

d) Para todo m.

e) Não existe m tal que a inequação seja satisfeita qualquer que seja x.

32) (SM-68)

Os valores de k que tornam $5x^2 - 4x + k$ uma soma de dois quadrados são:

a) $k < \frac{4}{5}$ b) $k = \frac{4}{5}$ c) $k = -\frac{4}{5}$

d) $k > \frac{4}{5}$ e) $-1 < k < 1$.

33) (CESCEM-69)

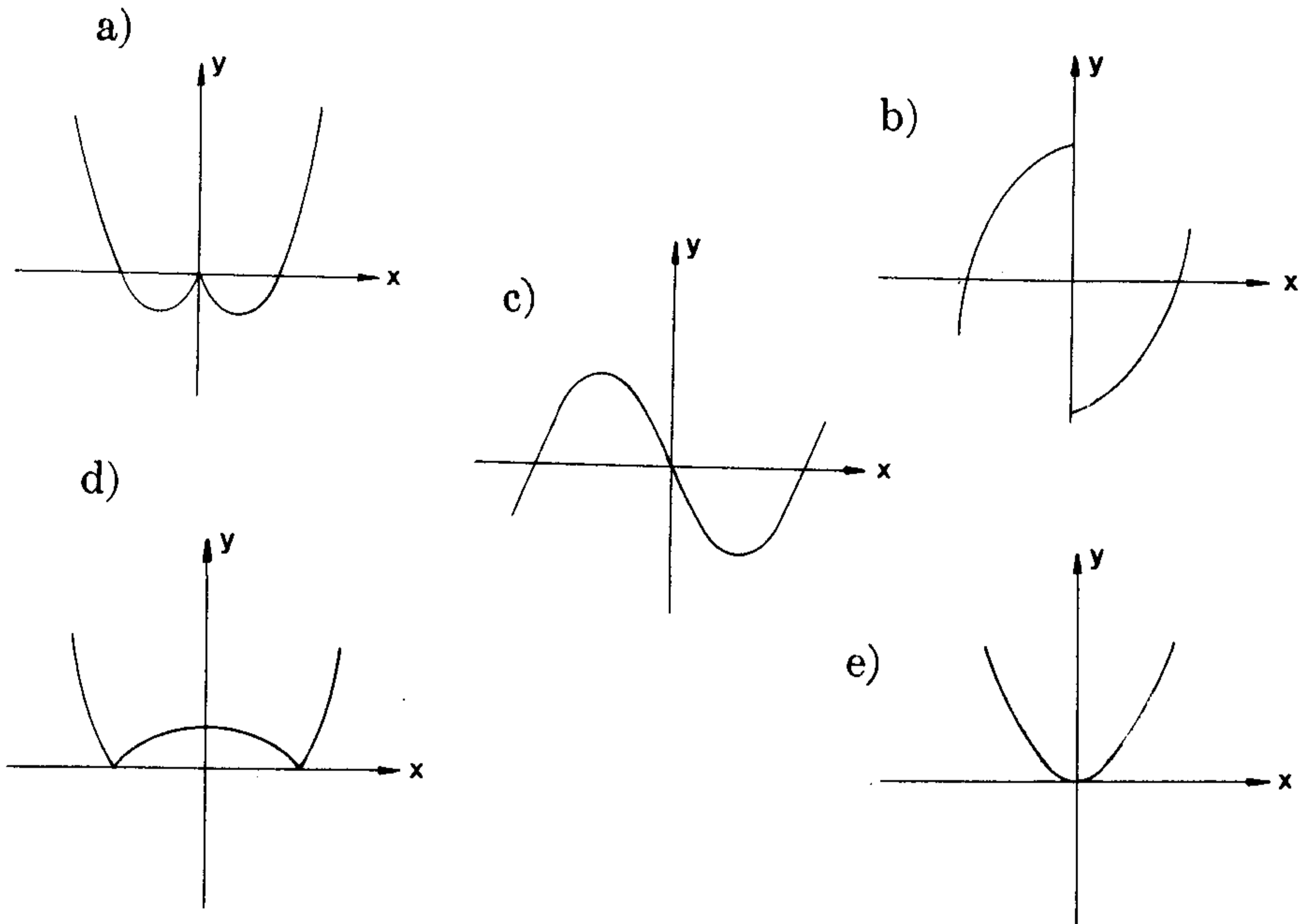
A representação gráfica da função $y = x^2 - |x|$

a)

b)

c)

d)

e)

34) (PUCSP-68)

Sendo x um número real positivo qualquer, tem-se:

a) $\sqrt{x} + \sqrt{x} = 1 + x$ para algum $x > 0$.

b) $\sqrt{x} + \sqrt{x} < 1 + x$ para qualquer $x > 0$.

c) $\sqrt{x} + \sqrt{x} > 1 + x$ para qualquer $x > 0$.

d) $\sqrt{x} + \sqrt{x} = \sqrt{x} + \sqrt[4]{x}$ para qualquer $x > 0$.

e) NRA.

35) (CESCEA-70)

O conjunto de todos os x para os quais $\left| x + \frac{1}{x} \right| > 2$ é:

a) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\}$ b) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1 \text{ e } x \neq 1\}$

c) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1 \text{ ou } x < -1\}$

d) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1, x \neq 0 \text{ e } x \neq 1\}$

e) $\{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 1, x \neq 0\}$

36) (CESCEM-69)

Se dois trinômios do 2.º grau possuem as mesmas raízes, então:

a) Eles são necessariamente iguais.

b) Eles assumem necessariamente um máximo ou um mínimo no mesmo ponto.

c) Eles diferem por uma constante.

d) Suas concavidades são de mesmo sentido.

e) NRA.

37) (USP-67)

A equação $x^2 - 3mx + 4m^2 = 0$ tem as soluções entre -1 e 1 para os seguintes valores de m:

a) $m = 1$ b) $1 < m < 2$ c) $m \leqslant 0$ d) Para nenhum valor de m e) NRA.

38) (USP-48)

Determine m para que o número 2 seja interno ao intervalo das raízes de $3x^2 - 2mx + m = 0$.

39) (A.U.S.U.-70)

Se ambas as raízes de $x^2 + m(x - 1) = 0$ são maiores que 1, qual o maior valor que o parâmetro m pode assumir?

40) (UFMG-59)

Calcule p para que o gráfico do trinômio $y = x^2 - px - 3$ corte o eixo dos x no interior do segmento de abscissas externas -2 e 2.

41) (EN-58)

Determine m para que o número 2 seja exterior ao intervalo das raízes da equação $(m - 1) x^2 + (1 - 2m) x - 3 = 0$.

42) (UFRJ-69)

Determine a relação entre os coeficientes do trinômio $ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ a fim de que ele seja o quadrado de um binômio do primeiro grau.

43) (IME-47)

Dada a equação $(m - 1) x^2 - (m + 5) x - m = 0$, pedem-se:

I) Os valores de m para os quais a equação tem raízes reais.

II) Os valores de m para os quais a equação tem duas raízes de sinais contrários.

44) (UM-61)

Dado o trinômio $3m^2x^2 - 5mx + 2\ (4m + 1)$, determine m para que ele possa ser expresso como o produto de um fator pelo quadrado perfeito de um binômio.

45) (CICE-67)

Sendo $\begin{cases} 2x - 3y + 2m = 1 \\ x - 2y + m^2 = 2, \end{cases}$

o valor mínimo de x se obtém para m igual a:

a) 0 b) $\frac{4}{3}$ c) $\frac{2}{3}$ d) $\frac{-2}{3}$ e) $\frac{1}{6}$

46) (CICE-69-2c)

Considere o polinômio

$P(x) = x^2 + px + q$ (p, q reais), onde $p^2 > 4q$.

O número real a é tal que $P(a) < 0$. Estude as seguintes afirmações:

I) Se b é real, $b < a \Rightarrow P(b) < P(a)$

II) Obrigatoriamente, $a < \frac{-p}{2}$

III) $x_1 < a < x_2$, onde $P(x_1) = P(x_2) = 0$

IV) $P(x)$ é divisível por $(x - a)$

V) $P(a) \geqslant \frac{4q - p^2}{4}$

Conclua que:

a) As afirmações acima são verdadeiras, com exceção da primeira.
b) As afirmações II e III são verdadeiras.
c) Somente II e IV são falsas.
d) III e V são verdadeiras.
e) III e IV são falsas.

47) (CICE-67)

Seja a função $y = 3x^2 - 12$ definida no intervalo $-4 < x \leqslant 3$. O contradomínio de tal função é:

a) $-2 \leqslant y \leqslant 2$ b) $15 \leqslant y < 36$ c) $15 \leqslant y \leqslant 36$
d) $-12 \leqslant y \leqslant 36$ e) $-12 \leqslant y < 36$.

48) (CICE-69)

Dentre todos os retângulos de perímetro 10, a área daquele de área máxima vale:

a) 6 b) 4,5 c) 8 d) $\sqrt{20}$ e) 6,25

49) (ITA-60)

Nas linhas que se seguem há um "teorema" e sua "demonstração".

Identifique os erros e estabeleça o resultado correto.

Teorema: Seja $T(x) = ax^2 + bx + c$. Se p e q são números tais que $aT(p) < 0$ e $aT(q) > 0$, então, $T(x) = 0$ tem duas raízes distintas e p e q estão entre as raízes. Além disso, se $aT(u) = 0$, u é necessariamente uma raiz de $T(x) = 0$.

Demonstração: Para $b^2 - 4ac = 0$, os valores não nulos de $T(x)$ terão o sinal de a. Para $b^2 - 4ac < 0$, todo valor numérico de $T(x)$ terá sinal igual ao de a. Logo, se $T(p)$ e a têm sinais opostos, só se admite a possibilidade $b^2 - 4ac > 0$. Neste caso, entre as raízes é que estarão, justamente, os valores de x que dão a $T(x)$ sinal oposto ao sinal de a. Razão análoga mostra que o número q está entre as raízes. A terceira parte do enunciado é óbvia.

50) (CICE-69)

Abaixo temos uma frase composta de duas partes distintas, uma asserção e uma razão para essa asserção.

"A média geométrica de dois números positivos a e b é menor que sua média aritmética porque $\frac{(a+b)^2}{2} > ab$".

a) A asserção e a razão são proposições verdadeiras e a razão é uma justificativa correta da asserção.

b) A asserção e a razão são proposições verdadeiras, mas a razão não é uma justificativa correta da asserção.

c) A asserção é uma proposição verdadeira e a razão é uma proposição falsa.

d) A asserção é uma proposição falsa e a razão é uma proposição verdadeira.

e) A asserção e a razão são proposições falsas.

51) (EET-65)

Determine m para que o trinômio $y = (1 - m)x^2 - (1 + m)x + 2(m - 4)$ seja negativo qualquer que seja o valor de x.

52) (UCMG-66)

Determine m para que $(m + 1)x^2 - 2(m - 2)x + m$ seja positivo qualquer que seja x.

53) As raízes de $x^2 + bx + c = 0$ são reais e maiores que 1. Então, $b + c + 1$

a) Pode ser negativo.

b) Pode ser nulo.

c) É positivo.

d) É negativo.

e) Está compreendido entre -1 e 1.

54) Se $\frac{x}{y} = x - y$, então

a) $x \geqslant 4$ ou $x \leqslant 0$

b) y pode ser igual a 1.

c) x e y devem ser irracionais.

d) x e y não podem ser inteiros.

e) x e y são necessariamente racionais.

55) Se garantimos que $|x^2 - 4| < N$ para todo x tal que $|x - 2| < 0{,}01$, o menor valor que podemos usar para N é:

a) 0,0301 b) 0,0349 c) 0,0399 d) 0,0401

e) 0,0499.

56) (CICE-69-2c)

Considere os números

$$x = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{99}{100}$$

$$y = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{100}{101}$$

Podemos afirmar que:

a) $x > y$ b) $x < \frac{1}{10}$ c) $x > \frac{1}{10}$ d) $x = \frac{1}{10}$

e) NRA.

Sugestão: Considere o número $x . y$.

57) (EESC-71)

As condições sobre p e q para que o sistema

$$\begin{cases} x^2 - x - 2 < 0 \\ x^2 + px + q = 0 \end{cases}$$

admita sempre duas soluções reais distintas são:

a) $-2 < p < 4$: $-2 < q < \frac{p^2}{4}$

b) $-4 < p < 2$; $-2 < q < \frac{p^2}{4}$

c) $-2 < p < 4$; $-2 < q < 4$

d) $-4 < p < 2$; $-2 < q < 4$

e) $q < \frac{p^2}{4}$

PROBLEMAS

C

1) Demonstre a desigualdade de Caucy-Schwarz

$$\left[\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right]^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} (a_k)^2 \quad \sum_{k=1}^{n} (b_k)^2$$

2) (USP-48)

Calcule m para que $(m^2 - 1)\,x^2 - (m + 2)\,x + 1$ tenha um e um só de seus zeros interno ao intervalo $(-1, 1)$.

3) Prove que, para quaisquer reais a, b, c,

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc$$

4) (UFRJ-64)

Os lados opostos aos vértices A, B, C de um triângulo são $a = 3$, $b = 2 - x$, $c = \sqrt{x^2 + 8x + 7}$.

I) Em que intervalo pode variar x?

II) Qual é a área do triângulo?

III) Em que intervalo deve variar x para que o ângulo A seja menor que o ângulo C?

IV) Se o ângulo C é de 60°, qual o raio do círculo inscrito no triângulo?

5) Determine m para que $x^2 - 7x + 28 - 4m$ seja positivo para todo x negativo.

6) Suponha que $-1 \leqslant ax^2 + bx + c \leqslant 1$ para todo x tal que $-1 \leqslant x \leqslant 1$, onde a, b, c são números reais. Prove que $-4 \leqslant 2ax + \leqslant 4$ para todo x tal que $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

7) Se a, b, c são maiores ou iguais a zero, prove que $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8\,abc$.

8) (EESC-65)

Prove que $x^2 + 2x + q = 0$ admite raízes reais distintas se e só se $(1 + q)(x^2 + 2ax + q) - 2(q - 1)(x^2 + 1) = 0$ não admite raízes reais.

9) Prove que a equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{x - a} + \frac{1}{x + b} = 0$

$(a, b > 0)$ tem duas raízes reais, uma compreendida entre $\frac{a}{3}$ e $\frac{2a}{3}$, a outra entre $\frac{-2b}{3}$ e $\frac{-b}{3}$.

10) Demonstre a desigualdade triangular (ou desigualdade de Minkowsky).

$\left|\,|x| - |y|\,\right| \leqslant |x + y| \leqslant |x| + |y|$, válida para quaisquer reais x e y.

RESPOSTAS

A

1) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6   2) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7   3) $-1, 0, 1, 2$

4) -5 5) a) $x < -1$ ou $x > 1$ b) $-2 < x < 5$

c) $3 < x < 7$ d) $x < -1$ ou $x > 3$

e) $-4 < x < -2$ ou $-2 < x < \frac{2}{3}$

f) $1 < x < 2$ ou $x > 3$ g) $x < \frac{1}{3}$ ou $x > 1$

h) $x < -3$ ou $-1 < x < 2$ ou $x > 5$ i) $-3 \leqslant x \leqslant 2$

j) $-4 < x < 1$ ou $1 < x \leqslant 3$ l) $1 \leqslant x \leqslant 2$

m) $-\frac{1}{5} \leqslant x \leqslant \frac{2}{3}$

n) $-2 < x < 1$ ou $3 < x < 4$

o) $-2 < x < -1$ ou $1 < x < 2$

p) $-2 < x < -1$ ou $2 < x < 3$

q) $x < 2 - \sqrt{7}$ ou $x > 2 + \sqrt{7}$

r) $-3 < x < -2$ ou $1 < x < 2$

s) $x < -2$ ou $-2 < x < 2$

t) $x < 2$ ou $x > 3$

u) $x < -3, -2 < x < 1$ ou $x > 2$

v) $x < 0$ ou $1 \leqslant x \leqslant 4$

x) $-1 \leqslant x \leqslant 5$

6) a) positivo em $(-\infty, -3) \cup (2, \infty)$
negativo em $(-3, 2)$
nulo em $\{-3, 2\}$

b) positivo em $(-\infty, -3) \cup (1, 2) \cup (4, \infty)$
negativo em $(-3, 1) \cup (2, 4)$
nulo em $\{-3, 1, 2, 4\}$

c) positivo em $R - \{2\}$

d) positivo em $(-\infty, -1) \cup (1, 2) \cup (3, \infty)$
negativo em $(-1, 1) \cup (2, 3)$
nulo em $\{-1, 1, 2, 3\}$

7) B 8) E 9) Sim 10) -5 11) C

12) C 13) E 14) C 15) A 16) B

17) B 18) $\frac{\sqrt{3}}{3} \leqslant x \leqslant \sqrt{3}$ 19) Impossível

20) F 21) $-4 < x < -3$ ou $3 < x < 4$

22) $\frac{x-4}{x-5}$, para $x \notin \{3, 5\}$

23) $\frac{x^2+1}{(x+1)(x-2)}$ para $x \notin \{-1, 0, 1, 2, 3\}$

24) $(d-1)(d-10)$ 25) $(2x-3)(x+5)$

26) B 27) $3\left(x - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{23}{12}$

28) $7 - 4\sqrt{2} < m < 7 + 4\sqrt{2}$ 29) A 30) E

31) E 32) A 33) A 34) A

35) D 36) D 37) B 38) A

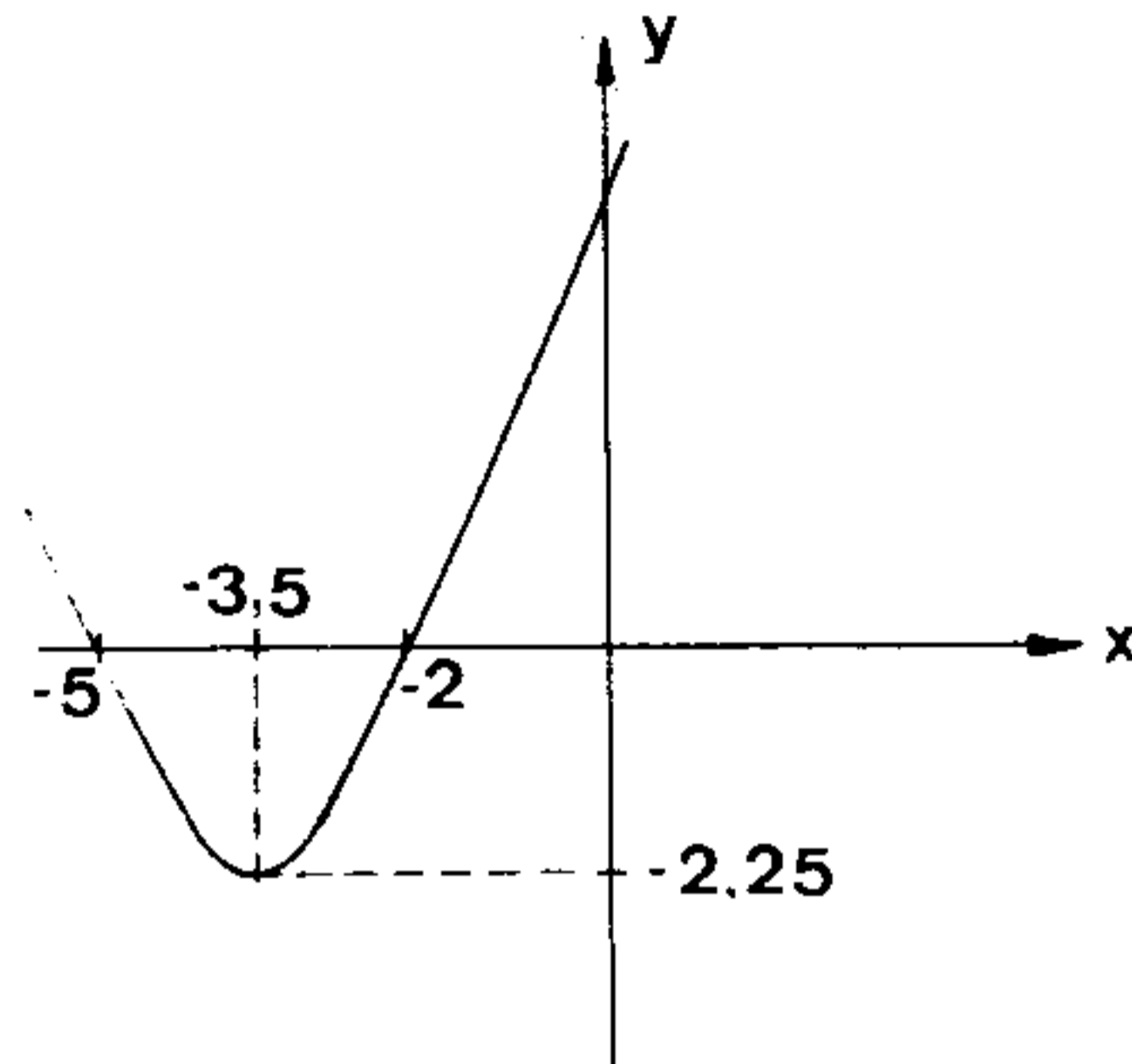
39) E 40) B 41) C 42) $x \geqslant 1$

43) $\left(\frac{-5}{6}, -\frac{193}{12}\right)$ 44) C 45) Impossível

46) $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{4a}\right)$ 47) $\frac{36a-9}{4a}$; $\frac{-3}{2a}$; negativo

48) 4 49) $\frac{-3\sqrt{2}}{4}$ 50) B 51) B

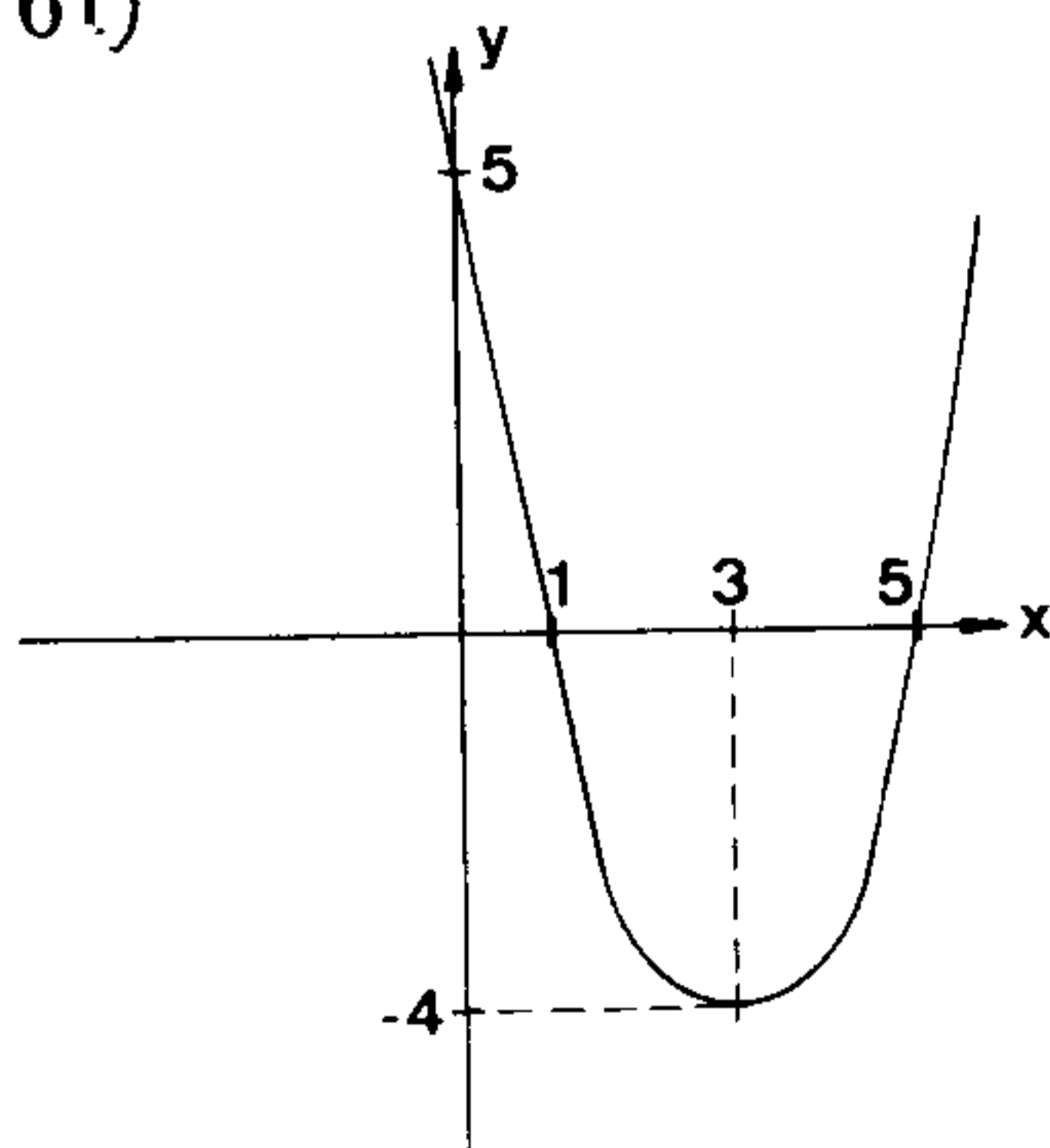
52)

y
-3,5
-5
-2
x
-2,25

53) $\frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{4}{3}$ 54) $-\frac{1}{3}x^2 + 3x - \frac{5}{3}$; máximo $\frac{61}{12}$

55) I) $m > 4$ II) $m < 0$ 56) $-6 < m < 6$

57) E 58) B 59) A 60) E

61)

y
5
1
3
5
x
-4

62) B 63) 5 64) A

65) D 66) E

B

1) $x < 1$ 2) E 3) D 4) todo x real

5) $2 < x < 3$ 6) $x \geqslant 1$ 7) A 8) $x \geqslant 1$

9) C 10) A 11) E 12) D

13) B 14) $\sqrt{2} - 1$ 15) C 16) E

17) B 18) $x^2 + x + 1$ 19) $\frac{p}{h} \geqslant 1 + \sqrt{2}$

21) C 22) A 23) C 24) B

25) D 26) $m = -1$ 27) $-3 < m < 73$

28) $2 < m < 4$ 29) E 30) D 31) D

32) D 33) A 34) A 35) D

36) B 37) E 38) $m > 4$ 39) $m = -4$

40) $-\frac{1}{2} < p < \frac{1}{2}$ 41) $m \leqslant \frac{-2 - \sqrt{15}}{2}$ ou

$\frac{-2 + \sqrt{15}}{2} \leqslant m < 1$

42) $b^2 = 4ac$ 43) I) $m \neq 1$ II) $m < 0$ ou $m > 1$

44) $m = \frac{1}{96}$ 45) C 46) D 47) E 48) E

49) Erro: razão análoga mostra que o número q está entre as raízes.

Correção: razão análoga mostra que o número q é exterior ao intervalo das raízes.

50) E 51) $\frac{11}{9} < m < 3$ 52) $m > \frac{4}{5}$. 53) C

54) A 55) D 56) B

57) B.

C

2) $-1 < m < 1$ ou $1 < m \leqslant 2$

4) I) $(-1,1)$ II) $\dfrac{3\sqrt{3(1-x^2)}}{2}$ III) $(-4+3\sqrt{2},1)$

IV) $\dfrac{5\sqrt{3}-\sqrt{21}}{6}$

5) $m \leqslant 7$.

PROBLEMAS DIVERSOS

1) Sejam a, b, c positivos tais que $a^2 = b^2 + c^2$. Prove que $a^n > b^n + c^n$ para todo natural $n > 2$.

2) Prove que se $ar - 2bq + pc = 0$ e $ac - b^2 > 0$, então, $pr - q^2 \leqslant 0$.

3) Prove que se $ax^2 + 2bx + c > 0$, $px^2 + 2qx + r > 0$ para todo x real, então, $apx^2 + 2bqx + cr > 0$ para todo x real.

4) Prove que se $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, então,

$$\frac{-1}{2} \leqslant ab + bc + ca \leqslant 1.$$

5) Prove que para todo natural $n > 1$, $3^n + 1$ não é divisível por 2^n.

6) Prove que se $0 < a < b$, então, a diferença entre a média aritmética de a e b e sua média geométrica é inferior a $\dfrac{(b-a)^2}{8a}$

7) Determine m para que $x^2 + 3xy + x + my - m$ seja o produto de dois fatores de primeiro grau e de coeficientes inteiros.

8) Calcule $\left(1 - \frac{1}{3}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{4}\right) \cdot \left(1 - \frac{1}{5}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{n}\right)$

9) Se $\dfrac{a+b}{b+c} = \dfrac{c+d}{d+a}$, então

a) $a = c$

b) $a + b + c + d = 0$

c) $a = c$ ou $a + b + c + d = 0$

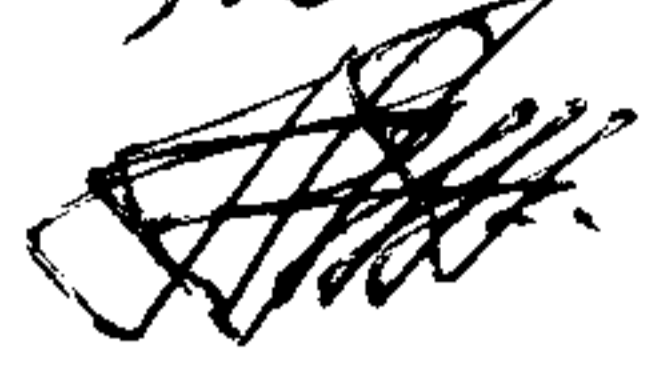
d) $a + b + c + d = 0$ se $a = c$

e) $a(b + c + d) = c(a + b + d)$.

RESPOSTAS

7) $m = 0$ ou $m = 12$

8) $\frac{2}{n}$

9) C

SIGLAS USADAS

AUSU - Associação Universitária Santa Úrsula - Gb
CESCEA - Vestibular Unificado - Área de Ciências Humanas - SP
CESCEM - Vestibular Unificado - Área Biomédica - SP
CM - Faculdade de Economia Cândido Mendes - GB
CICE - Vestibular Unificado - Área Tecnológica - GB
COMCITEC - Vestibular Unificado - Área Tecnológica - Grande Rio
COMSART - Vestibular Unificado - Área de Ciências Humanas - Grande Rio
EEL - Escola de Engenharia de Lins - SP
EET - Escola de Engenharia de Taubaté - SP
EESC - Escola de Engenharia de São Carlos - SP
EMMOP - Escola de Minas e Metalurgia de Ouro Preto - MG
EN - Escola Naval - GB
ENCE - Escola Nacional de Ciências Estatística - GB
EPUSP - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo - SP
FEI - Faculdade de Engenharia Industrial - SP
FIB - Faculdades Integradas Benett - GB
IEI - Instituto Eletrotécnico de Itajubá - MG
IME - Instituto Militar de Engenharia - GB
ITA - Instituto Tecnológico de Aeronáutica - SP
MAPOFEI - Vestibular Unificado - Área Tecnológica - SP
PUC - Pontifíca Universidade Católica - GB

PUCSP	- Pontifícia Universidade Católica - SP
SEG	- Concurso para Professor de Ensino Médio da Secretaria de Educação e Cultura da Guanabara - GB
SM	- Escola de Engenharia Souza Marques - GB
UC	- Universidade de Campinas - SP
UCMG	- Universidade Católica de Minas Gerais - MG
UEG	- Universidade do Estado da Guanabara - GB
UFB	- Universidade Federal da Bahia - BA
UFF	- Universidade Federal Fluminense - RJ
UFJF	- Universidade Federal de Juiz de Fora - MG
UFMG	- Universidade Federal de Minas Gerais - MG
UFPA	- Universidade Federal do Paraná - PR
UFRJ	- Universidade Federal do Rio de Janeiro - GB
UFRRJ	- Universidade Federal Rural do Rio de Janeiro - RJ
UGF	- Universidade Gama Filho - GB
UM	- Universidade Mackenzie - SP
USP	- Universidade de São Paulo - SP
2c	- 2.º Concurso
3c	- 3.º Concurso
NRA	- Nenhuma das respostas anteriores.

* * *

Hamilton Fábio Mota Medeiros.

Belém-Pa, 27 de Maio de 2008

Álgebra I